А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 6-8 КЛАССОВ

ПРОСВЕЩЕНИЕ
1966

А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК
ДЛЯ VI—VIII КЛАССОВ

Под редакцией
С. И. НОВОСЕЛОВА

Утверждён Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ"
МОСКВА 1966

От издательства

Шестое издание „Алгебры“ А. Н. Барсукова переработано и приведено в соответствие с новой программой. Переработка учебника и изложение вопросов, вновь включенных в программу восьмилетней школы, выполнены С. И. Новоселовым.

Главу „Счётная (логарифмическая) линейка“ и о возвышении в квадрат и куб, извлечении квадратного и кубического корней при помощи счётной линейки написал учитель математики школы № 315 Москвы И. Б. Вейцман.

Одиннадцатое издание печатается с десятого без изменений.

6—6

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ.

§ 1. Употребление букв.

В алгебре *числа обозначаются* часто не **цифрами**, а буквами. Приведём примеры.

Пример 1. Из арифметики известно, что сложение чисел обладает переместительным законом: сумма не изменяется от перестановки слагаемых.

Например:

$$5+7=7+5=12;$$

$$11+20=20+11=31 \text{ и т. д.}$$

Как записать, что этот закон верен не только для чисел 5 и 7 или 11 и 20, а для любых чисел? Поступим так: обозначим одно из слагаемых буквой a, а другое — буквой b. Сумму этих чисел запишем, как обычно: $a+b$. Тогда переместительный закон сложения запишется так:

$$a+b=b+a.$$

Эта запись показывает, что, какие бы два числа a и b мы ни взяли, всегда получим в сумме одно и то же число, прибавим ли b к a или a к b.

Пример 2. Решим три сходные задачи: *Брат старше сестры на* 3 *года. Сколько лет брату, если сестре:* 1) 5 *лет?* 2) 11 *лет?* 3) $24\frac{1}{2}$ *года?*

Получим следующие решения:

$$1)\ 5+3=8;\quad 2)\ 11+3=14;$$

$$3)\ 24\frac{1}{2}+3=27\frac{1}{2}.$$

Вообще каков бы ни был возраст сестры, к нему надо прибавить 3 года, чтобы получить возраст брата. Сформулируем поэтому задачу так: *Брат старше сестры на 3 года. Сколько лет брату, если сестре m лет?*

Здесь буквой m обозначен возраст сестры. Значит, возраст брата будет равен $(m+3)$ годам.

В нашей первой задаче $m=5$, во второй $m=11$, в третьей $m=24\frac{1}{2}$.

Мы решили задачу в общем виде. Запись $m+3$ даёт общую формулу решения множества сходных, или, как говорят, однородных, задач, которые получим, заменяя m различными числами.

Пример 3. В задачниках по арифметике встречаются упражнения, например, такого вида:

$$x+3=11.$$

Требуется найти x.

Здесь буквой x (икс) обозначено неизвестное число — слагаемое. Зная, что каждое из двух слагаемых равно их сумме минус другое слагаемое, найдём x:

$$x=11-3, \text{ то есть } x=8.$$

Здесь буква x обозначает число, которое было сначала для нас неизвестным и которое мы определили, пользуясь правилами арифметики.

В первом примере буквы a и b означали любые числа. Говорят, что в этом случае буквы a и b могут принимать любые числовые значения.

Во втором примере буква m тоже может принимать различные значения, но уже не любые. Например, бессмысленно было бы дать букве m значение $m=500$, так как до такого возраста люди не доживают.

Наконец, в третьем примере, для того чтобы равенство было верным, буква x может принимать только единственное значение 8.

Обычно в алгебре для обозначения чисел употребляются буквы латинского алфавита.

§ 2. Алгебраические выражения.

Решим задачу.

Ученик купил n тетрадей по 2 коп. за тетрадь и учебник за 8 коп. Сколько заплатил он за всю покупку?

Чтобы узнать стоимость всех тетрадей, надо цену одной тетради умножить на число тетрадей. Значит, стоимость тетрадей будет равна $2 \cdot n$ копейкам.

Стоимость же всей покупки будет равна

$$(2 \cdot n + 8) \text{ копейкам.}$$

Заметим, что перед множителем, выраженным буквой, знак умножения принято опускать, он просто подразумевается. Поэтому предыдущую запись можно представить в таком виде:

$$2n + 8.$$

Получили формулу решения задачи. Она показывает, что для решения задачи надо цену тетради умножить на число купленных тетрадей и к произведению прибавить стоимость учебника.

Вместо слова «формула» для подобных записей употребляют также название «алгебраическое выражение».

Алгебраическим выражением называется запись, состоящая из чисел, обозначенных цифрами или буквами и соединённых знаками действий.

Для краткости вместо «алгебраическое выражение» говорят иногда просто «выражение».

Приведём ещё примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+3}{b-1}; \quad 3mn; \quad 9(p+q); \quad a; \quad (3+8) \cdot 7; \quad 4{,}5.$$

Из этих примеров видим, что алгебраическое выражение может состоять только из одной буквы, а может совсем не содержать чисел, обозначенных буквами (два последних примера). В этом последнем случае выражение называется также арифметическим выражением.

Дадим в полученном нами алгебраическом выражении $2n+8$ букве n значение 5 (значит, ученик купил 5 тетрадей). Подставив вместо n число 5, получим:

$$2\cdot 5+8,$$

что равно 18 (то есть 18 коп.).

Число 18 является значением данного алгебраического выражения при $n=5$.

Значением алгебраического выражения называется число, которое получится, если в это выражение подставить вместо букв данные их значения и произвести над числами указанные действия.

Например, мы можем сказать: значение выражения $2n+8$ при $n=2$ равно 12 (12 коп.).

Значение этого же выражения при $n=3$ равно 14 (14 коп.) и т. д.

Мы видим, что значение алгебраического выражения зависит от того, какие значения мы дадим входящим в него буквам. Правда, иногда бывает, что значение выражения не зависит от значений входящих в него букв. Например, выражение $2(a+3)-2a$ равно 6 при любых значениях a.

Найдём в виде примера числовые значения выражения $3a+2b$ при различных значениях букв a и b.

Пусть $a=4$ и $b=2$.

Подставим в данное выражение вместо a число 4, а вместо b число 2 и вычислим полученное выражение:

$$3a+2b=3\cdot 4+2\cdot 2=12+4=16.$$

Итак, при $a=4$ и $b=2$ значение выражения $3a+2b$ равно 16.

Таким же образом найдём, что при $a=5$ и $b=7$ значение выражения равно 29, при $a=0$ и $b=1$ оно равно 2 и т. д.

Результаты вычислений можно записать в виде таблицы, которая наглядно покажет, как изменяется значение выражения в зависимости от изменения значений входящих в него букв.

Составим таблицу из трёх строк. В первой строке будем записывать значения a, во второй — значения b и

в третьей — значения выражения $3a+2b$. Получим такую таблицу:

a	4	5	0	3	3
b	2	7	1	5	1
$3a+2b$	16	29	2	19	11

В § 1, говоря о переместительном законе сложения, мы записали, что два выражения $a+b$ и $b+a$ равны:

$$a+b=b+a.$$

Такая запись называется равенством.

Два алгебраических выражения, соединённые знаком «равно», образуют равенство.

Как известно из арифметики, кроме знака равенства, употребляются ещё знаки неравенства:

$>$ — этот знак означает больше,
$<$ — этот знак означает меньше.

Например:

$5>2$ — читается: пять больше двух;
$3<7$ — читается: три меньше семи.

Следует запомнить, что знак неравенства всегда обращён остриём к меньшему числу.

Два выражения, соединённые знаком «больше» или «меньше», образуют неравенство.

Пример. Измерив отрезок, получили, что его длина d больше 5 *см*, но меньше 6 *см*. Результат измерения можно записать в виде двойного неравенства:

$$5 \text{ см} < d < 6 \text{ см}.$$

§ 3. Допустимые значения букв.

Из примеров, приведённых в § 1, заключаем, что буквы, входящие в какое-либо алгебраическое выражение, могут принимать иногда любые значения (первый

пример), иногда лишь некоторые, но не любые значения (второй пример).

Определение. **Значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, называются допустимыми значениями для этих букв.**

Если выражение получилось в результате решения задачи, то совокупность, или, как принято говорить, множество, допустимых значений для букв определяется по смыслу самой задачи.

Так, в выражении $2n+8$, полученном в § 2, множеством допустимых значений для n является только множество натуральных чисел, так как количество тетрадей может выражаться лишь натуральным числом.

Если о значениях букв в данном выражении ничего не сказано, то для такого выражения допустимыми считаются все те значения букв, при которых выражение имеет смысл.

Пусть дано выражение:

$$\frac{2x-15}{2}.$$

Найдём его значение при $x=2$. Подставив в него вместо x число 2, получим:

$$\frac{2\cdot 2-15}{2}=\frac{4-15}{2}.$$

Получили в числителе уменьшаемое, которое меньше вычитаемого. Выражение при $x=2$ потеряло смысл. Значит, число 2 не является допустимым значением для x. Легко видеть, что x в этом выражении может принимать значения только бóльшие или равные $\frac{15}{2}$. При всех значениях x, меньших $\frac{15}{2}$, выражение теряет смысл. Коротко эти допустимые значения для x можно записать так: $x \geqslant \frac{15}{2}$.

Знак $\geqslant$ означает «больше или равно».

В выражении $\frac{2}{a-3}$ допустимыми значениями для a будут только числа, бóльшие 3, так как при $a=3$ в зна-

менателе получается нуль, а (как известно из арифметики) на нуль делить нельзя; если же a меньше, чем 3, то нельзя из a вычесть 3. Множество допустимых значений для a можно записать так: $a > 3$.

§ 4. Порядок действий.

Когда в арифметике над числами нужно было произвести различные действия, то мы производили их в порядке, установленном особыми правилами. Эти же правила остаются и в алгебре.

Напомним, что

сложение и вычитание называются действиями первой ступени;

умножение и деление называются действиями второй ступени.

Напомним теперь правила о порядке действий.

Правило 1. ***Действия одной и той же ступени производятся в том порядке, в каком они записаны.***

Примеры.

$$17 - 11 + 8 = 6 + 8 = 14;$$
$$8 : 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Правило 2. ***Если выражение содержит действия различных ступеней, то сначала производят действия высшей ступени, затем низшей ступени.***

Поясним это правило на примерах.

Пример 1.

$$3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38.$$

Первым произведено умножение (действие второй ступени), затем — сложение.

Пример 2.

$$2{,}5 \cdot 3{,}7 + 5{,}9 \cdot 6{,}1 - 2{,}4 \cdot 3{,}2 =$$
$$= 9{,}25 + 35{,}99 - 7{,}68 = 37{,}56.$$

И в этом примере мы сначала выполнили все умножения (действия второй ступени), а затем (в порядке записи

произвели сложение и вычитание (действия первой ступени).

Но иногда приходится отступать от порядка, указанного в правиле 2. Покажем это на задаче.

Задача. *Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного a км в час, другого b км в час. Каково расстояние между пунктами, если велосипедисты встретились через t часов?*

Решим задачу по вопросам.

1) Какое расстояние проходили за час оба велосипедиста вместе?

$$a+b \text{ (км)}.$$

2) Чему равно расстояние между двумя пунктами?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо полученное расстояние $a+b$ умножить на t. Если мы запишем это действие в виде

$$a+bt \text{ (км)},$$

то ответ будет неверен, так как по правилу 2 мы должны в этом выражении b умножить на t и результат прибавить к a. Нам надо показать, что здесь сначала следует произвести сложение (действие первой ступени), а затем умножение (действие второй ступени). Показывается это при помощи скобок, и выражение записывается так:

$$(a+b)t \text{ (км)}.$$

Правило 3. ***Если нужно произвести раньше действия низшей ступени, то применяются скобки. Действия над числами, заключёнными в скобки, производятся первыми.***

Приведём примеры.

1) $11-2\cdot 4=11-8=3$, но $(11-2)\cdot 4=9\cdot 4=36$.

2) $(5+3)\cdot(8-2)=8\cdot 6=48$, но $5+3\cdot 8-2=$ $=5+24-2=27$.

Если дано дробное выражение, записанное с помощью черты, то черта заменяет скобки и означает, что надо вычислить отдельно выражение, стоящее в числителе, и

отдельно выражение, стоящее в знаменателе, и первый результат разделить на второй.

Пример.

$$\frac{a+b}{c-d}=(a+b):(c-d).$$

При $a=20$, $b=16$, $c=8$, $d=2$ получим:

$$\frac{a+b}{c-d}=\frac{20+16}{8-2}=\frac{36}{6}=6.$$

§ 5. Основные законы сложения и умножения.

В дальнейшем, когда будем изучать действия над числами, изображёнными цифрами или буквами (безразлично), нам придётся во многих выводах опираться на те законы действий, которые изучались в арифметике. В силу важности этих законов они называются основными законами действий.

Напомним их.

1. Переместительный закон сложения.

Сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых.

Этот закон уже был записан в § 1 в виде равенства:

$$a+b=b+a,$$

где a и b — любые числа.

Из арифметики известно, что переместительный закон верен для суммы любого числа слагаемых.

2. Сочетательный закон сложения.

Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.

Для суммы трёх слагаемых имеем:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Например, сумму $5+7+11$ можно вычислить двумя способами так:

$$(5+7)+11=12+11=23,$$
$$5+(7+11)=5+18=23.$$

Сочетательный закон справедлив для любого числа слагаемых.

Так, в сумме $a+b+c+d$ четырёх слагаемых рядом стоящие слагаемые можно как угодно объединять в группы и заменять эти слагаемые их суммой:

$$a+b+c+d=(a+b+c)+d=(a+b)+(c+d)=$$
$$=a+(b+c)+d=a+b+(c+d)=(a+b)+c+d.$$

Например, $1+3+5+7=16$; мы получим то же число 16, каким бы способом ни группировали рядом стоящие слагаемые:

$$1+(3+5)+7=1+8+7=16,$$
$$1+3+(5+7)=1+3+12=16,$$
$$(1+3)+(5+7)=4+12=16.$$

Переместительным и сочетательным законами часто пользуются при устных вычислениях, располагая числа так, чтобы легче было их сложить в уме.

Пример 1.

$$89+67+11.$$

Поменяем местами два последних слагаемых, получим:

$$89+11+67.$$

Сложить числа в этом порядке оказалось гораздо легче.

Обычно слагаемые в новом порядке не переписывают, а производят их перемещение в уме: переставив мысленно 67 и 11, сразу складывают 89 и 11 и затем прибавляют 67.

Пример 2.

$$2\frac{2}{23}+7\frac{1}{2}+3+2\frac{1}{2}.$$

Чтобы легче было сложить эти числа в уме, изменим порядок слагаемых так:

$$2\frac{2}{23}+3+7\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}.$$

Пользуясь сочетательным законом, заключим два последних слагаемых в скобки:

$$2\frac{2}{23}+3+\left(7\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right).$$

Сложение чисел в скобках произвести легко, получим:

$$2\frac{2}{23}+3+10=2\frac{2}{23}+13=15\frac{2}{23}.$$

3. Переместительный закон умножения.

Произведение не изменяется от перемены порядка сомножителей:

$$ab=ba,$$

где a и b — любые числа.

Из арифметики известно, что переместительный закон верен для произведения любого числа сомножителей.

4. Сочетательный закон умножения.

Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.

Для произведения трёх сомножителей имеем:

$$(ab)c=a(bc).$$

Например, произведение трёх сомножителей $5\cdot3\cdot4$ можно вычислить так:

$$(5\cdot3)\cdot4=15\cdot4=60$$

или так:

$$5\cdot(3\cdot4)=5\cdot12=60.$$

Для произведения четырёх сомножителей имеем:

$$abcd=(abc)d=(ab)cd=a(bc)d=(ab)(cd)=$$
$$=a(bcd)=ab(cd).$$

Например, $2\cdot6\cdot\frac{1}{3}\cdot5=20$; то же число 20 получится при любой группировке рядом стоящих сомножителей:

$$2\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot5=2\cdot2\cdot5=20;\qquad(2\cdot6)\left(\frac{1}{3}\cdot5\right)=12\cdot\frac{5}{3}=20;$$
$$2\left(6\cdot\frac{1}{3}\cdot5\right)=2\cdot10=20.$$

Применение *переместительного* и *сочетательного законов* умножения часто значительно облегчает вычисления.

Пример 1.

$$25 \cdot 37 \cdot 4.$$

Умножить 25 на 37 не очень легко. Переместим два последних сомножителя:

$$25 \cdot 4 \cdot 37.$$

Теперь умножение легко выполнится в уме.

Пример 2.

$$75 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 2.$$

Применим переместительный и сочетательный законы, запишем это выражение так:

$$75 \cdot 4 \cdot (35 \cdot 2).$$

Все эти действия легко выполняются в уме.

5. Распределительный закон умножения по отношению к сложению.

Чтобы умножить сумму двух (или нескольких) чисел на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и результаты сложить:

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Пример 1. Распределительный закон мы применяем, например, при умножении двузначных (и многозначных) чисел. Так, чтобы умножить 26 на 7, мы представляем 26 в виде суммы $20+6$, умножаем 20 на 7, 6 на 7 и результаты складываем:

$$26 \cdot 7 = (20+6) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 140 + 42 = 182.$$

Но иногда бывает выгоднее поступать наоборот: вместо того чтобы умножить каждое слагаемое на одно и то же число, сначала находят сумму этих слагаемых и умножают её на данное число.

Пример 2.

$$87 \cdot 28 + 13 \cdot 28.$$

Представим выражение в другом виде:

$$(87+13) \cdot 28.$$

Мы применили здесь распределительный закон, но только записанный в обратном порядке:

$$ac + bc = (a + b)c.$$

Теперь вычисление выполняется очень легко (устно).

§ 6. Краткие исторические сведения.

Первые алгебраические сведения можно найти у древних народов.

В *древнем египетском сочинении по математике* (около 2000 лет до нашей эры) также содержались некоторые сведения из алгебры.

Особо следует отметить сочинение выдающегося математика IX века нашей эры Мухаммеда аль-Хорезми. Самое прозвище его, аль-Хорезми, указывает на его родину — Хорезм (ныне Узбекская ССР). Его сочинение по математике содержит подробное изложение алгебраических знаний того времени. В те времена ещё не были введены специальные знаки для сокращённой записи формул и правил. Не было, например, знаков сложения и вычитания, знака равенства и пр. Поэтому аль-Хорезми все правила излагал полностью словами.

Желая сократить запись, математики стали прибегать к сокращениям некоторых часто встречающихся слов. Например, при сложении и вычитании вместо слов «плюс» и «минус» писали только первые буквы: *п* и *м*.

Обозначение чисел буквами принято в математике со времени французского математика Виета (1540—1603). В своём математическом сочинении Виет обозначал неизвестные числа гласными буквами латинского алфавита, а известные — согласными. Введение буквенных обозначений имело большое значение. С помощью букв стало возможно записывать правила и формулы в общем виде для любых чисел.

В 1703 году в России вышел учебник по математике русского математика-педагога Л. Ф. Магницкого. Назывался он «Арифметика», но на самом деле содержал не только арифметику, а и сведения из алгебры, геометрии, астрономии, геодезии и др. Л. Ф. Магницкий, так же как и Виет, употреблял для обозначения неизвестных чисел гласные буквы («литеры гласные, полагаемые за непознанное число»), а для обозначения известных — согласные («согласные, полагаемые за количества данных чисел»).

Книга Л. Ф. Магницкого была в России основным руководством по математике в течение десятков лет. По ней учился великий русский учёный М. В. Ломоносов.

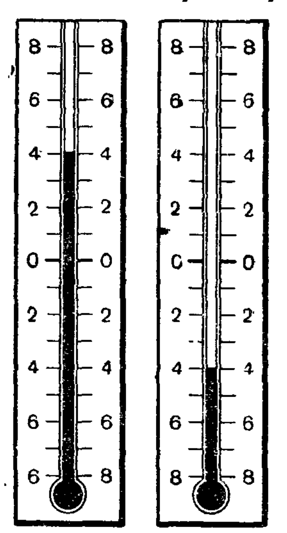
Современный вид алгебраические записи приняли в работах знаменитого английского учёного Исаака Ньютона (1642—1727).

ГЛАВА ВТОРАЯ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 7. Положительные и отрицательные числа.

Если на вопрос «Какова температура воздуха сейчас?» ответить: «Термометр показывает 4°», то это не будет точным ответом: термометр может показывать 4° тепла или 4° холода (черт. 1).



Черт. 1.

Говорят также: 4° выше нуля и 4° ниже нуля. Эти пояснительные слова: «тепло», «холод», «выше нуля», «ниже нуля» — приходится добавлять потому, что температура может от нуля изменяться в двух противоположных направлениях.

Она может повышаться (ртуть в термометре движется от нуля вверх) и понижаться (ртуть движется от нуля вниз).

Но когда передают по радио сводку погоды, то этих пояснительных слов не употребляют. Говорят коротко, например, так: «В Якутске было минус 6°, в Мурманске — минус 1°, в Казани — плюс 1°, в Минске — плюс 3°, в Ростове — плюс 12°».

Таким образом, вместо слов «выше» или «ниже нуля» к числу градусов присоединяют знак плюс или минус.

Указанную температуру можно записать так:

Якутск	—6°	Минск	+3°
Мурманск	—1°	Ростов	+12°
Казань	+1°		

Эту запись так и понимают, что температура в Якутске была 6° ниже нуля, в Казани 1° выше нуля и т. д. Однако часто, когда термометр показывает тепло, то знак плюс опускают и вместо +13° пишут просто 13°.

Таким образом, для обозначения температуры выше нуля употребляются числа 1, 2, 3, $3\frac{1}{2}$, 7 и т. д., то есть те числа, которые известны из арифметики. Они называются **положительными** числами.

Для обозначения температуры ниже нуля употребляются новые числа: —1, —2, —3, $-3\frac{1}{2}$, —7 и т. д. Они называются **отрицательными** числами.

Температура в нуль градусов выражается числом нуль. *Это число не относится ни к положительным, ни к отрицательным числам.* Перед ним можно поставить и знак плюс и знак минус или не ставить никакого. Записи 0; +0; —0 обозначают одно и то же число — нуль.

Отрицательные числа применяются не только при измерении температуры.

Положительные и отрицательные числа можно применять для обозначения: будущего и прошедшего времени, количества выигранных и проигранных очков в соревнованиях, прихода и расхода, поступлений в кассу и выдач из неё и т. п.

Ещё более тысячи лет тому назад индийские математики обозначали имущество положительными, а долг отрицательными числами.

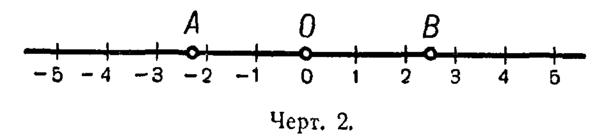
Изменение величин. Можно применять положительные и отрицательные числа к измерению изменений величин, записывая положительными числами их увеличение и отрицательными — уменьшение. Например, положительными числами можно записывать повышение, а отрицательными — понижение температуры.

Числа положительные (целые и дробные), отрицательные (целые и дробные) и нуль составляют множество рациональных чисел.

§ 8. Числовая ось.

Отметим на прямой произвольную точку O (черт. 2). Назовём её начальной точкой. Выберем какую-либо единицу длины, например 1 *см*. Отложим на прямой вправо от точки O один за другим отрезки, равные 1 *см*. Конец первого отрезка обозначим числом 1, конец второго — числом 2 и т. д.

Те же самые построения выполним слева от точки O.

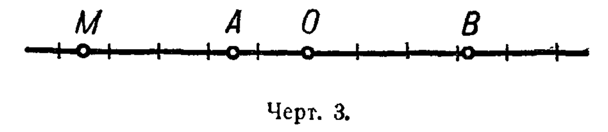


Черт. 2.

Концы отрезков, проведённых влево от точки O, будем обозначать числами -1, -2, -3 и т. д.

Понятно, что по обеим сторонам от точки O можно отложить и отрезки, выражающиеся любым дробным числом. Например, на чертеже 2 точка B изображает число $\frac{5}{2}$, точка A — число $-2{,}3$.

Прямая, на которой каждое число изображается соответствующей точкой, называется числовой прямой или числовой осью.



Черт. 3.

Чтобы найти, где расположена на числовой оси точка M (черт. 3), соответствующая, например, числу $-\frac{9}{2}$, откладываем от точки O влево отрезок, равный $4\frac{1}{2}$ выбранным единицам длины (в нашем случае $4\frac{1}{2}$ *см*).

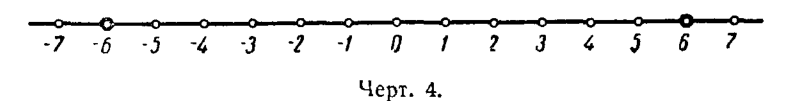
Для краткости вместо слов «точка, соответствующая числу a» говорят просто «точка a». На числовой оси (черт. 3) изображены точки: $-\frac{3}{2}$ (точка A), 3,2 (точка B), нуль (точка O).

В предыдущем параграфе мы уже встретились с числовой осью: шкала термометра представляет собой часть числовой оси.

В дальнейшем при изучении алгебры нам много раз придётся пользоваться числовой осью.

§ 9. Противоположные числа.

Числа 6 и —6 изображаются на числовой оси точками, находящимися на одинаковом расстоянии от начальной точки O, но по разные от неё стороны (черт. 4). Такие числа называются противоположными.



Черт. 4.

Определение. **Два числа называются противоположными, если соответствующие им точки числовой прямой расположены по разные стороны от начальной точки и на одинаковом расстоянии от неё.**

Так, например, числа 2,5 и —2,5 взаимно противоположны.

Правило 1. *Чтобы обозначить число, противоположное данному, перед данным числом ставят знак минус.*

Так, в приведённом примере, чтобы обозначить число, противоположное числу 2,5, достаточно поставить перед ним знак —; тогда получим —2,5.

Если дано отрицательное число, например —2, то противоположное ему число есть 2, поэтому $-(-2)=2$.

Число 0 противоположно самому себе, поэтому $-0=0$.

В примере § 7 мы видели, что положительную температуру можно записать числом градусов со знаком +.

Вообще, если некоторое число записано со знаком +, например +5, то такая запись обозначает само данное число, то есть $+5=5$.

Правило 2. *Если перед данным числом поставлен знак +, то данное число берётся без изменения.*

Итак, согласно правилам 1 и 2

$$+a=a; \quad -(+a)=-a; \quad +(-a)=-a; \quad -(-a)=a.$$

Например, если $a=3$, то $+3=3$, $-(+3)=-3$, $+(-3)=-3$, $-(-3)=3$;

если $a=-4$, то $+a=+(-4)=-4$.

$-a=-(-4)=4$, $\quad -(-a)=a=-4$.

Заметим, что и сами знаки + и — называются противоположными.

§ 10. Абсолютная величина числа.

Из некоторого пункта O выехали в противоположных направлениях два автомобиля. Первый прошёл 40 *км* вправо от пункта O, второй прошёл 50 *км* влево от того же пункта.

Желая показать не только пройденный путь, но и направление его, мы можем записать, что первый автомобиль прошёл $+40$ *км*, или просто 40 *км*, а второй прошёл -50 *км*.

Теперь ответим на следующий вопрос: какой из автомобилей прошёл большее расстояние?

Сравним между собой число километров, пройденных каждым автомобилем независимо от того, в каком направлении он двигался.

Первый автомобиль прошёл путь длиной в 40 *км*, второй — путь длиной в 50 *км*. Значит, второй автомобиль прошёл расстояние на 10 *км* большее, чем первый.

Сравнивая расстояния, пройденные обоими автомобилями, мы интересуемся только длиной пути независимо от направления, в каком этот путь пройден.

Длина пройденного пути всегда записывается положительным числом. Поэтому вместо отрицательного числа -50 мы взяли противоположное ему положительное число $+50$, которое и выражает число километров, пройденных вторым автомобилем. Говорят, что мы берём абсолютную величину числа -50.

Определение 1. **Абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему положительное число.**

Таким образом, абсолютная величина числа -10 равна $+10$, числа $-0,3$ равна $+0,3$ и т. д.

Для обозначения абсолютной величины числа употребляется особый знак — данное число заключается между двумя вертикальными чертами так: $|-50|$.

Значит,

$$|-50|=50; \quad |-0,3|=0,3; \quad \left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}; \quad |-3,87|=3,87.$$

Итак, на вопрос, поставленный выше, должны ответить так: второй автомобиль прошёл большее расстояние, так как

$$|-50|>40.$$

Мы сравниваем здесь абсолютную величину числа -50 с числом 40. В целях единства вводится также понятие абсолютной величины и для положительных чисел и для нуля.

Определение 2. **Абсолютной величиной положительного числа и нуля называется само это число.**

Следовательно,

$$|5|=5; \quad |40|=40; \quad |0|=0 \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, сравнивая расстояния, пройденные автомобилями, можем сказать, что сравниваем абсолютные величины чисел -50 и 40, и убеждаемся, что

$$|-50|>|40|.$$

Записи 5; $+5$; $|5|$ обозначают одно и то же положительное число пять. Очень важно запомнить, что и запись $|-5|$ означает то же самое число 5.

$$5=+5=|5|=|+5|=|-5|.$$

Возьмём какое-нибудь число, например -7.

Точка числовой оси, изображающая это число, находится влево от начальной точки и на расстоянии 7, то есть $|-7|$ единиц длины от неё.

Вообще, ***абсолютная величина числа а есть расстояние точки, изображающей это число на числовой оси, от начальной точки.***

§ 11. Сравнение рациональных чисел.

Мы умеем сравнивать между собой любые положительные числа, то есть всегда сможем указать, какое из двух данных положительных чисел больше и какое меньше.

Теперь, когда введены новые, отрицательные числа, нужно установить правило сравнения этих чисел как между собой, так и с положительными числами.

Для этого обратимся к числовой оси. Посмотрим, как расположены на ней положительные числа, сравнивать которые мы уже умеем.

Мы видим, что по мере продвижения вправо от точки O положительные числа становятся всё больше и больше. По мере продвижения влево (к точке O) числа, наоборот, уменьшаются до нуля. Значит, из двух положительных чисел то больше, которое на числовой оси изображается точкой, расположенной правее.

Распространим этот признак на всю числовую ось, установив такое правило:

из любых двух чисел то больше, которое на числовой прямой изображается точкой, расположенной правее.

Если число a больше числа b, то, так же как и в арифметике, пишут $a > b$ (или $b < a$), обращая знак неравенства остриём к меньшему числу.

-10 -5 -3 -1 $-\frac{1}{2}$ 0 1 3

Черт. 5.

Так, например, рассматривая чертёж 5, мы видим, что

$$3 > 0; \quad 1 > -5; \quad -\frac{1}{2} < 0; \quad -3 > -10; \quad -4 < -1.$$

Из установленного правила вытекает, что:

1. ***Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа.***

2. ***Всякое отрицательное число меньше нуля.***

Возьмём какие-нибудь два отрицательных числа, например -5 и -15.

Согласно правилу сравнения можно написать:

$$-5 > -15.$$

Но если возьмём абсолютные величины этих чисел и сравним их, то получим:

$$|-5| < |-15|.$$

Мы видим, что если одно отрицательное число больше другого, то его абсолютная величина меньше абсолютной величины другого, и, наоборот, если абсолютная величина одного отрицательного числа больше абсолютной величины другого отрицательного числа, то само это число меньше другого числа.

Например:

$$|-15| > |-8|, \quad \text{но} \quad -15 < -8;$$

$$\left|-1\frac{1}{4}\right| > |-1|, \quad \text{но} \quad -1\frac{1}{4} < -1.$$

Итак,

3. ***Из двух отрицательных чисел то больше, абсолютная величина которого меньше.***

Поэтому

$$-11 > -12, \quad \text{так как} \quad 11 < 12;$$

$$-1{,}2 < -1, \quad \text{так как} \quad 1{,}2 > 1.$$

§ 12. Сложение рациональных чисел.

Нам нужно теперь установить правила действий с рациональными числами, то есть правила сложения, вычитания, умножения и деления любых рациональных чисел. Начнём со сложения.

Постараемся установить такое правило сложения рациональных чисел, чтобы выполнить три следующих требования:

1. Чтобы задачи, которые в арифметике (то есть для положительных чисел) решались сложением, решались бы тем же действием в случае любых рациональных чисел.

2. Чтобы правило сложения любых рациональных чисел осталось для положительных чисел тем же, каким мы его знаем из арифметики.

3. Чтобы основные законы сложения, известные для положительных чисел (§ 5), сохранились и для сложения любых рациональных чисел.

Возьмём поэтому задачу, которая в арифметике решалась сложением, например:

Термометр показывал a°. Затем температура изменилась на b°. Сколько градусов показывает термометр теперь?

Пусть a и b — положительные числа. Положительное изменение температуры есть её повышение. Для решения этой задачи мы должны к a° прибавить b°. Получим ответ:

$$(a+b) \text{ градусов.}$$

Проверим это на примере.

1) Пусть $a=+4$; $b=+2$.

Значит, термометр показывал 4° тепла, затем температура повысилась на 2°. Очевидно, термометр показывает теперь 6° (черт. 6).

Черт. 6.

Следовательно,

$$(+4)+(+2)=+6,$$

как и должно быть.

Посмотрим теперь, какие значения должна принимать сумма $a+b$ при различных рациональных (не только положительных) значениях a и b.

2) Пусть $a=-4$, $b=-2$.

Отрицательное изменение температуры есть её понижение. Значит, термометр показывал сначала 4° холода, затем температура ещё понизилась на 2°. Ясно, что теперь термометр показывает —6° (черт. 7).

Следовательно,

$$(-4)+(-2)=-6.$$

Сравнивая результаты задач 1 и 2, установим следующее правило.

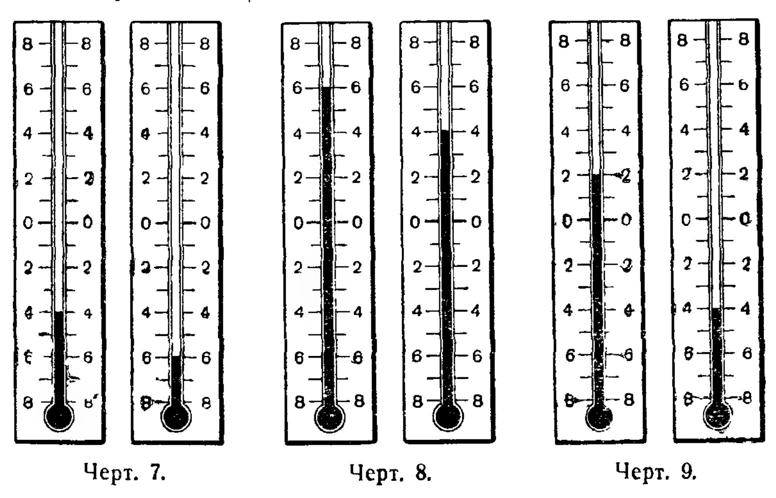
Правило 1. ***Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и перед результатом поставить их общий знак.***

Так, чтобы сложить —11 и —8, сложим их абсолютные величины, то есть 11 и 8, и перед полученным числом 19 поставим знак минус. Получим:

$$(-11)+(-8)=-19.$$

Сложение положительных чисел остается таким же, каким мы его знаем из арифметики.

3) Пусть $a=+6$, $b=-2$.



Черт. 7. Черт. 8. Черт. 9.

Значит, термометр показывал сначала 6° тепла, а затем температура понизилась на 2°. Очевидно, сейчас термометр показывает 4° тепла (черт. 8).

Следовательно, если мы хотим, чтобы и в этом случае задача решалась сложением, то должны будем записать:

$$(+6)+(-2)=+4.$$

4) Пусть $a=+2$, $b=-6$.

Так же как и в предыдущем случае, найдём, что термометр после понижения температуры на 6° стал показывать 4° холода (черт. 9).

Значит, решая и эту задачу сложением, мы должны записать:

$$(+2)+(-6)=-4.$$

Рассматривая случаи 3 и 4, установим правило.

Правило 2. ***Чтобы сложить два числа с противоположными знаками и с разными абсолютными величинами, надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую и перед разностью поставить знак числа с большей абсолютной величиной.***

Так, например, по этому правилу получим:

$$(-5)+(+7)=+2;$$
$$(+5)+(-7)=-2;$$
$$(-3{,}5)+(+1{,}2)=-2{,}3.$$

5) Пусть $a=+3$, $b=-3$.

Если термометр показывал 3° тепла, а затем температура понизилась на 3°, то термометр будет показывать 0°. Ясно также, что какое бы число $a°$ тепла ни показывал термометр, если затем температура понизится на $a°$, то термометр будет показывать 0°.

Значит,

Правило 3. ***Сумма двух противоположных чисел равна нулю:***

$$a+(-a)=0.$$

Отметим, что будет верно и обратное положение.

Если сумма двух чисел равна нулю, то эти числа взаимно противоположны.

Наконец, легко установить (и проверить на том же термометре), что, например:

$2+0=2$; $(-3)+0=-3$; $0+0=0$.
$0+2=2$; $0+(-3)=-3$;

Правило 4. ***Если одно из двух слагаемых равно нулю, то их сумма равна другому слагаемому.***

Установленные здесь четыре правила исчерпывают все возможные случаи сложения двух рациональных чисел.

§ 13. Сложение нескольких чисел.

Сложение нескольких рациональных чисел выполняется по тому же правилу, по которому производится сложение нескольких чисел в арифметике.

Чтобы сложить несколько рациональных чисел, надо сложить первые два слагаемых, затем к полученной сумме прибавить третье слагаемое, к полученной сумме прибавить четвёртое и так далее до конца.

Например:

$$(-7)+(+5)+(+2)+(-3)+(+9)=$$
$$=(-2)+(+2)+(-3)+(+9)=0+(-3)+(+9)=$$
$$=(-3)+(+9)=+6.$$

§ 14. Законы сложения.

Убедимся в том, что при сложении рациональных чисел остаются в силе основные законы сложения, установленные для положительных чисел.

Переместительный закон. *Для любых рациональных чисел a и b справедливо равенство:*

$$a+b=b+a.$$

Это следует из правил сложения рациональных чисел.

В самом деле, если числа имеют одинаковые анаки (правило 1), то мы складываем их абсолютные величины, то есть положительные числа, а для них переместительное свойство сложения справедливо.

Если же числа имеют противоположные знаки (правило 2), то мы из большей абсолютной величины вычитаем меньшую независимо от того, стоит ли число с большей абсолютной величиной на первом или на втором месте. Значит, и здесь величина суммы не зависит от порядка слагаемых.

Например:

$$5+(-7)=-(7-5)=-2 \text{ и}$$
$$(-7)+5=-(7-5)=-2.$$

В правилах 3 и 4 ничего не говорится о порядке слагаемых, значит, они верны при любом порядке слагаемых.

Переместительный закон справедлив при сложении любого числа слагаемых.

Покажем это на примере.

Складывая числа (— 5), 2 и (— 4) в любом порядке, мы получим одно и то же число (— 7):

$$(-5)+(+2)+(-4)=(-3)+(-4)=-7$$
$$(+2)+(-5)+(-4)=(-3)+(-4)=-7$$
$$(-4)+(+2)+(-5)=(-2)+(-5)=-7$$

и т. д.

Сочетательный закон. При сложении рациональных чисел остаётся в силе сочетательный закон сложения.

Убедимся в этом на примере суммы трёх слагаемых:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

При $a=-5$, $b=3, c=-7$ получим:

$$[(-5)+(+3)]+(-7)=(-2)+(-7)=-9$$
$$\text{и } (-5)+[(+3)+(-7)]=(-5)+(-4)=-9.$$

Нередко в вычислениях одновременно пользуются и переместительным и сочетательным законами.

Приведём такой пример.

Вычислим сумму

$$187+46+38+54+113.$$

Переместим слагаемые так:

$$187+113+46+54+38.$$

Произведём сложение в таком порядке:

$$(187+113)+(46+54)+38=300+100+38=438.$$

Такое одновременное применение переместительного и сочетательного законов иногда выражают кратко в виде следующего правила:

Слагаемые можно соединять в группы любым способом.

При вычислении суммы, содержащей и положительные и отрицательные слагаемые, можно применять следующее правило:

Чтобы сложить несколько рациональных чисел, можно сложить отдельно все положительные, отдельно все

отрицательные числа и полученные два числа сложить по правилу сложения двух чисел.

В справедливости этого правила нетрудно убедиться. Пользуясь переместительным законом, расположим (мысленно) слагаемые так, чтобы сначала стояли все положительные слагаемые, а за ними все отрицательные. Затем, пользуясь сочетательным законом, сложим отдельно все положительные слагаемые и отдельно все отрицательные. Получим два числа, которые сложим по правилу сложения двух рациональных чисел.

Пример. Сумму

$$(-5)+(+4)+(-10)+(+12)$$

можно вычислить так:

1) Сложить положительные слагаемые:

$$(+4)+(+12)=+16.$$

2) Сложить отрицательные слагаемые:

$$(-5)+(-10)=-15.$$

3) Сложить полученные суммы:

$$(+16)+(-15)=1.$$

§ 15. Вычитание рациональных чисел.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Вычесть из одного числа другое — значит найти такое третье число, которое, будучи сложено со вторым числом, даст первое число.

Другими словами, вычесть из какого-либо числа a число b — значит найти такое третье число c, чтобы было справедливо равенство:

$$c+b=a.$$

Например:

$5-(+7)=-2$, так как $(-2)+(+7)=+5$;

$(-3)-(+8)=-11$, так как $(-11)+(+8)=-3$;

$(-1)-(-5)=+4$, так как $(+4)+(-5)=-1$.

Чтобы вывести общее правило вычитания для любых рациональных чисел, поступим следующим образом. Заменим в предыдущих примерах вычитание прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Получим:

$$5+(-7)=-2;$$
$$(-3)+(-8)=-11;$$
$$(-1)+(+5)=+4.$$

Как видим, мы получили те же результаты, что и при вычитании. Следовательно, можно ввести правило:

Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a-b=a+(-b).$$

Докажем это правило.

Нам надо доказать справедливость равенства

$$a-b=a+(-b) \qquad (1)$$

при любых a и b.

Если выражение $a+(-b)$ в правой части является разностью чисел a и b, то, сложив его с вычитаемым b, мы должны получить уменьшаемое a.

Проверим это; сложив $a+(-b)$ и b, получим:

$$[a+(-b)]+(+b).$$

По сочетательному закону сложения это выражение запишем так:

$$a+[(-b)+(+b)]$$

Но сумма в квадратных скобках равна нулю, как сумма двух противоположных чисел.

Следовательно, будем иметь:

$$[a+(-b)]+(+b)=a+[(-b)+(+b)]=a+0=a.$$

Получили уменьшаемое. Значит, равенство (1) верно.

Приведённое правило заменяет вычитание сложением, а правило сложения нам уже известно.

Итак, оказалось, что вычитание одного рационального числа из другого можно заменить сложением двух рациональных чисел. Но сложение двух рациональных чисел всегда возможно и даёт единственный результат (§ 12). Значит, мы можем заключить, что в множестве

рациональных чисел вычитание всегда возможно и даёт единственный результат (как говорят, однозначно).

В арифметике, где действия выполнялись лишь над положительными числами, вычитание было не всегда возможно (например, из 5 нельзя вычесть 6), а теперь, когда мы ввели отрицательные числа, вычитание в множестве рациональных чисел стало всегда возможным.

Известные из арифметики свойства вычитания остаются в силе для любых рациональных чисел. Напомним эти свойства.

1. Прибавление разности.

Чтобы прибавить разность, можно прибавить уменьшаемое и от результата отнять вычитаемое.

Например:

$$(-7)+[(+3)-(-10)]=(-7)+(+13)=6,$$
$$[(-7)+(+3)]-(-10)=(-4)-(-10)=$$
$$=(-4)+(+10)=6.$$

Значит,

$$(-7)+[(+3)-(-10)]=[(-7)+(+3)]-(-10).$$

В общем виде это свойство можно записать так:

$$a+(b-c)=(a+b)-c.$$

2. Вычитание суммы.

Чтобы вычесть сумму нескольких чисел, можно вычесть первое слагаемое, из результата вычесть второе и так далее до конца.

Пример.

$$(-7)-[(-3)+(+8)]=(-7)-(+5)=-12,$$
$$[(-7)-(-3)]-(+8)=(-4)+(-8)=-12.$$

3. Вычитание разности.

Чтобы вычесть разность, можно вычесть уменьшаемое и к результату прибавить вычитаемое.

Пример.

$$(-8)-[(-6)-(+3)]=(-8)-(-9)=1$$

и

$$[(-8)-(-6)]+(+3)=(-2)+(+3)=1.$$

В общем виде:

$$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

§ 16. Алгебраическая сумма.

Рассмотрим выражение:

$$(+7)-(+4)+(+2)-(-5)-(+3)+(-1), \qquad (1)$$

обозначающее несколько сложений и вычитаний.

На основании правила вычитания мы можем все вычитания заменить сложением с числами, противоположными вычитаемым. Получим:

$$(+7)+(-4)+(+2)+(+5)+(-3)+(-1). \qquad (2)$$

Таким образом, все числа в выражении (1) стали слагаемыми.

Определение. **Выражение, обозначающее несколько последовательных сложений и вычитаний, называется алгебраической суммой.**

В алгебраической сумме всякое вычитание можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому.

Например:

$$a+(-b)-(-c)-(+d)+(-e)=a+$$
$$+(-b)+(+c)+(-d)+(-e).$$

Заменив в алгебраической сумме все вычитания сложениями, можно записать её в виде суммы, в которой слагаемые могут быть любыми рациональными числами (положительными, отрицательными, равными нулю), а также числами, обозначенными буквами.

Для упрощения записи мы можем везде знак сложения перед скобками опустить, запомнив раз навсегда, что каждый знак в выражении относится к следующему за ним числу и что все эти числа следует сложить.

Так, выражение (2) можно записать короче:

$$7-4+2+5-3-1.$$

Это выражение и показывает, что надо сложить числа 7; -4; $+2$; $+5$; -3; -1.

В алгебраической сумме всякое сложение можно заменить вычитанием противоположного числа.

Так, например,

$$a+b+c=a-(-b)+c.$$

Здесь прибавление числа b заменено вычитанием числа $-b$.

§ 17. Умножение.

При установлении правил умножения для любых рациональных чисел положим в основу те же требования, что и для сложения рациональных чисел (см. § 12).

Возьмём опять задачу на изменение температуры.

Температура изменяется каждый час на a°. В настоящий момент термометр показывает 0°. Сколько градусов покажет термометр через t часов?

Как и раньше, будем обозначать понижение температуры отрицательными числами.

Кроме того, в задачу входит ещё и время, в течение которого изменялась температура. Время, отсчитываемоё от настоящего момента в будущее, считается положительным, а время, отсчитываемое в прошедшее, считается отрицательным.

Вернёмся к задаче. Так как каждый час температура изменялась на a°, то через t часов температура изменится на at градусов.

Посмотрим, чему будет равно произведение at при различных значениях a и t.

1) $a=2$; $t=3$.

В настоящий момент термометр показывает 0°. В течение трёх часов температура будет повышаться каждый час на 2°. Очевидно, что за 3 часа температура повысится на 6° (черт. 10). Значит, $2\cdot3=6$.

2) $a=-2$; $t=3$.

Температура понижается каждый час на 2°. Значит, за 3 часа она понизится на 6° (черт. 11). Таким образом, $(-2)\cdot3=-6$.

3) $a=2$; $t=-3$.

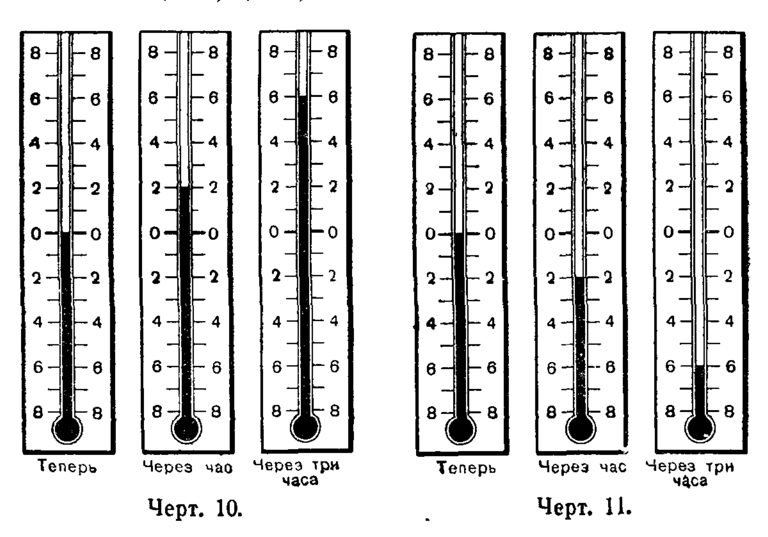
Температура повышается каждый час на 2°. Сейчас термометр показывает 0°. Значит, 3 часа тому назад температура была ниже нуля на 6° (3 часа темпера-

тура поднималась каждый час на 2° и достигла к настоящему моменту нуля градусов) (черт. 12). Значит, $2 \cdot (-3) = -6$.

4) $a = -2$; $t = -3$.

Температура понижается каждый час на 2°. Сейчас 0°. Значит, 3 часа тому назад она должна была быть выше нуля на 6° (понижаясь каждый час на 2°, она за 3 часа достигнет нуля градусов) (черт. 13).

Отсюда $(-2) \cdot (-3) = 6$.



Черт. 10. Черт. 11.

Сопоставим все рассмотренные случаи умножения:

$$2 \cdot 3 = 6 \qquad (-2) \cdot (-3) = 6;$$

$$(-2) \cdot 3 = -6. \qquad 2 \cdot (-3) = -6.$$

Учитывая полученные результаты, введём следующее правило умножения рациональных чисел.

Правило 1. ***Произведение двух чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если сомножители имеют противоположные знаки.***

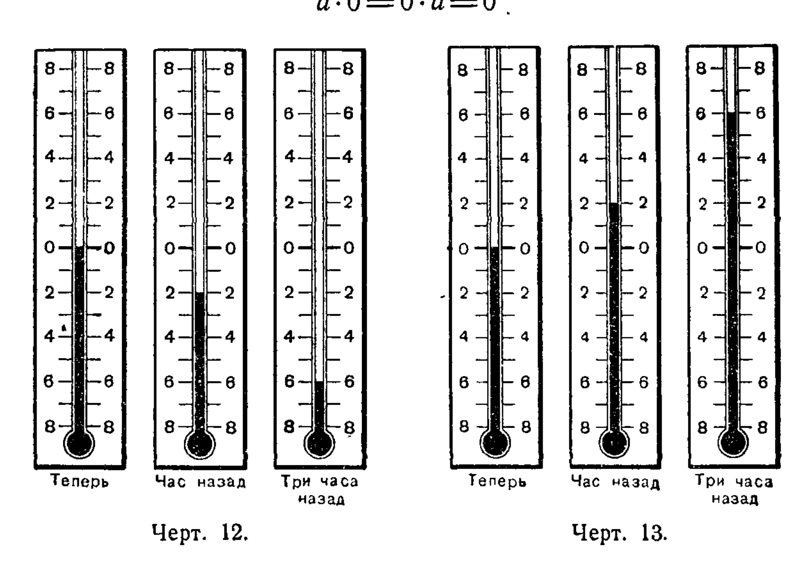
Таким образом, согласно введённому правилу, получим:

$$(-3)\cdot 5 = -15;\quad \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{6}{25};$$

$$4\cdot(-25) = -100.$$

Кроме того, будем иметь при любом a:

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$$



Черт. 12. Черт. 13.

(произведение абсолютных величин двух чисел, из которых хотя бы одно равно нулю, будет тоже равно нулю).

Правило 2. ***Произведение двух чисел равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.***

§ 18. Умножение нескольких чисел.

Умножение нескольких рациональных чисел выполняется по тому правилу, по которому производится умножение нескольких чисел в арифметике.

Чтобы перемножить несколько рациональных чисел, надо найти произведение первых двух чисел, затем этот

результат умножить на третий данный сомножитель, полученный результат умножить на четвёртый и так далее до конца. Например:

$$(-3)\cdot 4\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6=(-12)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6=$$
$$=24\cdot(-5)\cdot 6=(-120)\cdot 6=-720.$$

Но более употребителен другой способ умножения нескольких чисел.

При умножении приходится всё время перемножать абсолютные величины: сначала находим произведение абсолютных величин первых двух чисел, затем произведение абсолютной величины результата и абсолютной величины третьего числа и т. д. Значит, абсолютная величина всего произведения равна произведению абсолютных величин всех сомножителей.

Так, если в приведённом выше примере сначала найти произведение

$$3\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 6=720,$$

то получится абсолютная величина искомого произведения.

Заметим, что если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и всё произведение равно нулю, например:

$$2\cdot(-3)\cdot 0\cdot 15=(-6)\cdot 0\cdot 15=0\cdot 15=0.$$

Допустим, что ни один из сомножителей не равен нулю; определим знак произведения.

При последовательном перемножении данных сомножителей знак произведения изменяется на противоположный всякий раз, когда приходится умножать на отрицательный множитель. Отсюда ясно, что произведение будет положительным числом, если отрицательных сомножителей имеется чётное число.

Пример.

$$2\cdot(-4)\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-5)\cdot(-10)=$$
$$=(-8)\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-5)\cdot(-10)=(-24)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-5)\times$$
$$\times(-10)=12\cdot(-5)\cdot(-10)=(-60)\cdot(-10)=600.$$

Отрицательных сомножителей было 4, в произведении получилось положительное число 600.

Произведение будет отрицательным числом, если отрицательных сомножителей имеется нечётное число.

Пример.

$$8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-4) \cdot \frac{1}{6} \cdot (-5) = (-12) \cdot (-4) \cdot \frac{1}{6} \cdot (-5) =$$
$$= 48 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-5) = 8 \cdot (-5) = -40.$$

Отрицательных сомножителей было 3, в произведении получилось отрицательное число -40.

Отсюда следует, что для определения знака произведения достаточно знать, имеет ли данное выражение чётное или нечётное число отрицательных сомножителей.

Таким образом, получаем следующее правило для умножения нескольких чисел:

Произведение нескольких чисел равно произведению абсолютных величин всех сомножителей, взятому со знаком плюс, если число отрицательных сомножителей чётное (или их нет совсем), и со знаком минус, если число отрицательных сомножителей нечётное.

Пример. Вычислить произведение:

$$(-5) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 10.$$

1) Перемножаем абсолютные величины сомножителей:

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{75}{2}.$$

2) Найденное произведение берём со знаком —, так как среди данных сомножителей три отрицательных.

Искомое произведение равно $-\frac{75}{2}$.

§ 19. Законы умножения.

Для рациональных чисел остаются справедливыми те же законы умножения, которые были приведены в § 5 для положительных чисел.

1. Переместительный закон.

Для любых рациональных чисел a и b справедливо равенство:

$$ab = ba.$$

Это следует из определения умножения рациональных чисел. В самом деле, мы берём произведение абсолютных величин сомножителей, а оно не зависит от порядка, в котором берём эти абсолютные величины.

Знак произведения тоже определяем независимо от того, в каком порядке следовали сомножители. Мы смотрим только, одинаковые ли знаки у обоих сомножителей или различные.

Переместительный закон справедлив для произведения любого числа сомножителей. Так, например, перемножая числа —2, 3, 5 и —8 в любом порядке, мы получим одно и то же число 240. В самом деле, в каком бы порядке мы ни перемножали абсолютные величины сомножителей, получим одно и то же число $2\cdot3\cdot5\cdot8=240$. Знак произведения получим, подсчитав количество отрицательных сомножителей независимо от порядка, в каком они расположены. В нашем примере число 240 следует взять со знаком $+$, так как в произведении содержится два отрицательных сомножителя.

2. Сочетательный закон.

При умножении любых рациональных чисел остаётся в силе сочетательный закон умножения.

Для любых трёх рациональных чисел a, b и c справедливо равенство:

$$(ab)c=a(bc).$$

В самом деле, в выражении $a(bc)$ мы должны абсолютную величину a умножить на произведение абсолютных величин b и c, в выражении $(ab)c$ мы должны произведение абсолютных величин a и b умножить на абсолютную величину c. Но абсолютные величины — это неотрицательные числа (то есть положительные или равные нулю), а для таких чисел сочетательный закон верен.

Значит, абсолютная величина обеих частей равенства одна и та же. Легко также убедиться, что и знак обоих произведений будет один и тот же, каковы бы ни были знаки чисел a, b, и c (оба произведения положительны, если среди чисел a, b и c нет отрицательных или два из них отрицательны; оба произведения отрицательны, если

одно из этих чисел или все три отрицательны; оба произведения равны нулю, если хотя бы одно из чисел a, b или c равно нулю).

Таким же образом можно убедиться в справедливости сочетательного закона для произведения любого числа сомножителей.

Пример.

$$5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 6\cdot(-8).$$

Это произведение нетрудно вычислить, перемножив сначала второй и третий сомножители:

$$5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 6\cdot(-8)=5\cdot(-4)\cdot(-8)=160.$$

3. Распределительный закон.

Для любых рациональных чисел a, b и c справедливо равенство:

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Убедимся в этом на примерах.

1) $[2+(-3)]\cdot 4=2\cdot 4+(-3)\cdot 4.$

Действительно,

$$[2+(-3)]\cdot 4=(-1)\cdot 4=-4;$$
$$2\cdot 4+(-3)\cdot 4=8-12=-4.$$

2) $[(-3)+5]\cdot(-6)=(-3)\cdot(-6)+5\cdot(-6).$

Действительно,

$$[(-3)+5]\cdot(-6)=2\cdot(-6)=-12;$$
$$(-3)\cdot(-6)+5\cdot(-6)=18-30=-12.$$

Распределительный закон имеет место при умножении на какой-либо множитель суммы любого числа слагаемых.

Именно:

Чтобы умножить сумму на какое-либо число, можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Пример.

$$[(+7)+(-3)+(+2)]\cdot(-3)=(+6)\cdot(-3)=-18$$

и

$$(+7)\cdot(-3)+(-3)\cdot(-3)+(+2)\cdot(-3)=$$
$$=(-21)+(+9)+(-6)=-18.$$

Пользуясь переместительным законом умножения, в последнем примере можно переставить сомножители, тогда получим следующее:

$$(-3)\cdot[(+7)+(-3)+(+2)]=(-3)\cdot(+6)=-18$$

и

$$(-3)(+7)+(-3)(-3)+(-3)(+2)=$$
$$=(-21)+(+9)+(-6)=-18.$$

Отсюда вывод:

Чтобы умножить какое-либо число на сумму, можно умножить это число на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Отметим следующие два свойства умножения:

1. Умножение произведения.

Чтобы умножить произведение нескольких чисел на число, можно умножить на это число один из сомножителей, оставив остальные без изменения.

Пример.

$$[4\cdot(-3)\cdot5]\cdot(-2)=(-60)\cdot(-2)=120$$

и

$$[4\cdot(-2)]\cdot(-3)\cdot5=(-8)\cdot(-3)\cdot5=120.$$

2. Умножение на произведение.

Чтобы умножить число на произведение нескольких чисел, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и так далее до конца.

Пример.

$$4\cdot[5\cdot(-2)\cdot3]=4\cdot(-30)=-120$$

и

$$(4\cdot5)\cdot(-2)\cdot3=20\cdot(-2)\cdot3=(-40)\cdot3=-120.$$

Эти последние свойства вытекают из законов умножения.

§ 20. Деление.

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Разделить одно число на другое — значит найти такое третье число, которое, будучи умножено на делитель, даст в произведении делимое:

$$a:b=c, \text{ если } bc=a.$$

Основываясь на этом определении, выведем правило деления для рациональных чисел.

Прежде всего укажем раз навсегда, что делитель не может быть нулём. Деление на нуль исключается по той же причине, по которой оно было исключено в арифметике.

Абсолютная величина a равна произведению абсолютных величин b и c. Значит, абсолютная величина c равна абсолютной величине a, делённой на абсолютную величину b.

Определим знак частного c.

Если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, то частное — положительное число. Действительно, если a и b положительны, то частное c тоже будет положительным числом.

Пример. $12:4=3$, так как $4 \cdot 3=12$.

Если a и b отрицательные, то частное c и в этом случае должно быть положительным, так как, умножив на него отрицательное число b, мы должны получить отрицательное число a.

Пример. $-12:(-4)=3$, так как $(-4) \cdot 3=-12$.

Если делимое и делитель имеют разные знаки, то частное — отрицательное число. Действительно, если a положительно, а b отрицательно, то c должно быть отрицательным, так как, умножив на него отрицательное число b, мы должны получить положительное число a.

Пример. $12:(-4)=-3$, так как $(-4) \cdot (-3)=12$.

Если a отрицательно, а b положительно, то и в этом случае c должно быть отрицательным числом, так как, умножив на него положительное число b, мы должны получить отрицательное число a.

Пример. $(-12):4=-3$, так как $4 \cdot (-3)=-12$.

Итак, мы пришли к следующему правилу деления:

Чтобы разделить одно число на другое, надо абсолютную величину делимого разделить на абсолютную величину делителя и перед частным поставить знак плюс, если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, и знак минус,

если делимое и делитель имеют противоположные знаки.

Как мы уже говорили, деление на нуль невозможно, поясним это более подробно. Пусть требуется разделить какое-нибудь не равное нулю число, например —3, на 0.

Если число a есть искомое частное, то, умножив его на делитель, то есть на 0, мы должны получить делимое, то есть —3. Но произведение $a \cdot 0$ равно 0, и делимое —3 не может получиться. Отсюда мы заключаем, что число —3 на нуль разделить нельзя.

Пусть требуется число 0 разделить на 0. Пусть a — искомое частное; умножив a на делитель 0, получим в произведении 0 при любом значении a:

$$a \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, мы не получили никакого определённого числа: умножив на 0 любое число, мы получим 0. Поэтому деление нуля на нуль также считается невозможным.

Для рациональных чисел остаётся в силе следующее основное свойство частного:

Частное двух чисел не изменится, если делимое и делитель умножить на одно и то же число (не равное нулю).

Поясним это такими примерами.

1. Рассмотрим частное $6:3=2$; умножим делимое и делитель на —4; тогда получим новое частное

$$[6 \cdot (-4)] : [3 \cdot (-4)] = (-24) : (-12) = 2.$$

Итак, в новом частном мы получили то же самое число 2.

2. Рассмотрим частное $5:7=\frac{5}{7}$; умножим делимое и делитель на $-\frac{1}{2}$; тогда получим такое частное:

$$\left[5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] : \left[7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \left(-\frac{5}{2}\right) : \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{5}{7}.$$

Частное не изменилось, так как получилось то же самое число $\frac{5}{7}$.

§ 21. Свойства деления.

Отметим свойства деления, известные из арифметики: эти свойства остаются в силе для любых рациональных чисел.

1. Деление суммы.

Чтобы разделить сумму нескольких чисел на число, можно разделить на это число каждое слагаемое и результаты сложить.

Пример.

$$[12+(-28)+32]:4=16:4=4$$

и

$$12:4+(-28):4+32:4=3+(-7)+8=4.$$

2. Деление произведения.

Чтобы разделить произведение нескольких чисел на число, можно разделить на это число любой из сомножителей, оставив остальные без изменения.

Пример.

$$[12\cdot(-18)\cdot30]:6=(-6480):6=-1080$$

и

$$(12:6)\cdot(-18)\cdot30=2\cdot(-18)\cdot30=-1080,$$
$$12\cdot[(-18):6]\cdot30=12\cdot(-3)\cdot30=-1080,$$
$$12\cdot(-18)\cdot(30:6)=12\cdot(-18)\cdot5=-1080.$$

3. Деление на произведение.

Чтобы разделить число на произведение нескольких чисел, можно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и так далее до конца.

Пример.

$$120:[2\cdot(-3)\cdot5]=120:(-30)=-4$$

и

$$120:2:[(-3)\cdot5]=60:[(-3)\cdot5]=-20:5=-4.$$

§ 22. Возведение в степень.

В арифметике сложение равных чисел рассматривается как новое действие — умножение.

При этом число-слагаемое пишется только один раз, а за ним (после знака умножения) пишется число-

множитель, которое показывает, сколько раз надо взять слагаемым первое число. Например.

$$3+3+3+3+3=3\cdot 5;$$
$$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\cdot 3.$$

В алгебре умножение равных между собой чисел рассматривается как новое действие, которое называется возведением в степень.

Если, например, число 5 умножается само на себя, то произведение $5\cdot 5=25$ называется второй степенью числа 5; произведение $5\cdot 5\cdot 5=125$ называется третьей степенью числа 5; число $5\cdot 5\ 5\cdot 5=625$ — четвёртой степенью этого числа и т. д. При этом говорят, что число 5 возводится во вторую, в третью, в четвёртую и т. д. степень.

Определение. **Действие, посредством которого находится произведение нескольких равных сомножителей, называется возведением в степень.**

При этом:

1. **Произведение n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a.**

2. **Число, которое возводится в степень, называется основанием степени.**

3. **Число, которое показывает, в какую степень возводится основание, называется показателем степени.**

Так, в рассмотренном примере основанием степени было взято число 5; показателем степени в первом случае было число 2, во втором — число 3, а в третьем — число 4.

Степень коротко записывают так: пишут основание степени и справа от него вверху (более мелко) показатель степени:

$$5^2=25,\qquad 5^3=125,\qquad 5^4=625 \text{ и т. д.}$$

В общем случае

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Приведем примеры, поясняющие всё сказанное.

1. Примем за основание число 3 и будем возводить его в различные степени:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9; \quad 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27; \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \text{ и т. д.}$$

2. Примем за основание какое-нибудь отрицательное число, например — 2, тогда получим:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4;$$
$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8;$$
$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16;$$
$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \text{ и т. д.}$$

3. Приняв за основание дробное число, например $\frac{2}{3}$, получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \text{ и т. д.}$$

4. Приняв за основание дробное отрицательное число, например $-\frac{3}{4}$, получим:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16};$$
$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64};$$
$$\left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{81}{256} \text{ и т. д.}$$

Следует запомнить, что нуль в любой степени равен нулю, единица в любой степени равна 1, так как

$$0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n \text{ раз}} = 0; \quad 1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ раз}} = 1.$$

Принято вторую степень числа называть **квадратом**, а третью степень — **кубом** этого числа.

Это объясняется тем, что площадь квадрата со стороной a выражается второй степенью числа a, то есть $a \cdot a = a^2$ (квадратных единиц), а объём куба с ребром, равным a, выражается третьей степенью этого числа: $a \cdot a \cdot a = a^3$ (кубических единиц). Возведение числа во

вторую и третью степень короче называют возведением в квадрат и в куб.

По смыслу определения действия возведения в степень показатель степени может равняться двум, трём, четырём и т. д., то есть может быть только натуральным числом, большим единицы.

Принято считать, что *первая степень любого числа есть само это число,* например:

$$5^1 = 5; \quad 8{,}35^1 = 8{,}35; \quad (-3)^1 = -3.$$

Заметим, однако, что показатель 1 обычно не пишется.

Итак, если число записано без показателя степени, то подразумевается, что этот показатель равен 1.

В арифметике показателями степени пользуются для краткой записи разложения целых чисел на множители в том случае, когда среди простых множителей данного числа имеются равные между собой. Разложив, например, на простые множители число 60 984, получим:

$$60984 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11.$$

Кратко, пользуясь показателями степени, это число можно записать так:

$$60984 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2.$$

Полезно запомнить запись единиц различных разрядов в виде степеней числа 10:

$$100 = 10^2; \quad 1000 = 10^3; \quad 10000 = 10^4; \quad 100000 = 10^5;$$
$$1000000 = 10^6 \text{ и т. д.}$$

Из приведённых числовых примеров видно, что при возведении отрицательного числа в чётную степень получается положительное число, а при возведении в нечётную степень получается отрицательное число.

Это и понятно. Чётная степень всякого числа есть произведение чётного числа сомножителей, а чётное число отрицательных сомножителей даёт в произведении положительное число (§ 18).

Нечётная степень отрицательного числа, как произве-

дение нечётного числа отрицательных сомножителей, будет отрицательным числом.

Итак, *чётная степень отрицательного числа положительна, нечётная степень отрицательна.*

§ 23. Порядок выполнения действий.

Возведение в степень считается арифметическим действием третьей ступени. Если алгебраическое выражение содержит различные арифметические действия, то сперва производится возведение в степень, как действие высшей (третьей) ступени, затем умножение и деление (действия второй ступени) и, наконец, сложение и вычитание (действия первой ступени).

Поясним сказанное примерами.

Пример 1.

$$4 \cdot 5^2 : 2 = 4 \cdot 25 : 2 = 100 : 2 = 50.$$

Первым произведено возведение в квадрат (действие третьей ступени).

Пример 2.

$$5 \cdot 2^3 - 6^2 : 12 = 5 \cdot 8 - 36 : 12 = 40 - 3 = 37.$$

Произведены действия сначала третьей (возведение в куб и в квадрат), затем второй и, наконец, первой ступени.

Пример 3.

$$3 \cdot (4-6)^3 + (3 \cdot 7)^2 + 5 = 3 \cdot (-2)^3 + 21^2 + 5.$$

Сначала вычислены разность и произведение, заключённые в скобки, затем должно быть выполнено возведение в степень и т. д.

Пример 4. Вычислить значение алгебраического выражения

$$\frac{2a^2}{a^2 - b^2} + 3ab^3$$

при $a = 1$, $b = -2$; при $a = -3$, $b = 5$; при $a = 2$, $b = 2$.

При $a = 1$, $b = -2$ получим:

$$\frac{2 \cdot 1^2}{1^2 - (-2)^2} + 3 \cdot 1 \cdot (-2)^3 = \frac{2}{1-4} + 3 \cdot (-8) =$$
$$= \frac{2}{-3} - 24 = -24\frac{2}{3}.$$

При $a=-3$, $b=5$ получим:

$$\frac{2\cdot(-3)^2}{(-3)^2-5^2}+3\cdot(-3)\cdot 5^3=\frac{2\cdot 9}{9-25}+3\cdot(-3)\cdot 125=$$
$$=-\frac{18}{16}-1125=-1126\frac{1}{8}.$$

При $a=2$, $b=2$ данное выражение вычислить нельзя; оно теряет смысл, так как в знаменателе получается $2^2-2^2=0$, а на нуль делить нельзя.

§ 24. Уравнения.

Задача. *К некоторому числу прибавили 8 и получили 17. Найти это число.*

Решим задачу так: обозначим неизвестное число какой-либо буквой, например a. Прибавив к нему 8, получим $a+8$. Но по условию задачи эта сумма должна быть равна 17. Значит,

$$a+8=17.$$

Здесь a и 8 являются слагаемыми, а 17 — их суммой. Каждое из двух слагаемых равно их сумме минус другое слагаемое. Значит,

$$a=17-8, \text{ или } a=9.$$

Проверим, подставив 9 вместо a в выражение $a+8$:

$$9+8=17.$$

Задача решена верно.

Равенства, в которые входит неизвестное число, носят особое название.

Определение 1. **Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.**

Вот ещё примеры уравнений:

$$2m+5=2; \quad \frac{3}{4}k+7=13; \quad x^2+5x=-6.$$

Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется левой частью, а стоящее справа — правой частью уравнения. В уравнении $a+8=17$ $a+8$ — левая, а 17 — правая часть уравнения.

Определение 2. **Решить уравнение — значит найти те значения неизвестного, при которых обе части уравнения равны одному и тому же числу** (другими словами, все те значения неизвестного, при которых равенство будет верным).

Говорят, что эти значения неизвестного удовлетворяют уравнению.

Определение 3. **Значения неизвестного, которые удовлетворяют уравнению, называются корнями или решениями уравнения.**

Так, мы видели, что $a=9$ есть корень, или решение, уравнения $a+8=17$. Подстановкой можно убедиться, что $m=-\frac{3}{2}$ является корнем уравнения $2m+5=2$; $k=8$ — корнем уравнения $\frac{3}{4}k+7=13$; -2 и -3 — корни уравнения $x^2+5x=-6$.

Примечание. Большею частью неизвестные числа в уравнении обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z. Но это не обязательно. Неизвестное число может быть обозначено любой буквой.

Решение простейших уравнений. Приведём ещё несколько примеров уравнений, которые легко решаются на основании известных из арифметики зависимостей.

Пример 1.

$$x-187=215.$$

Неизвестное число x является уменьшаемым. Но уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с разностью. Следовательно, будем иметь:

$$x=187+215, \text{ или } x=402.$$

Проверка. $402-187=215$.

Пример 2.

$$\frac{4}{15}:x=\frac{2}{8}.$$

Делитель равен делимому, делённому на частное. Следовательно,

$$x=\frac{4}{15}:\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{15\cdot 2}=\frac{2}{5}.$$

Проверка. $\frac{4}{15}:\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 2}=\frac{2}{3}$.

Пример 3.

$$5x+14=6.$$

Находим $5x$ как неизвестное слагаемое:

$$5x=6-14, \qquad 5x=-8.$$

Теперь находим x как неизвестный сомножитель:

$$x=-8:5=-\frac{8}{5}=-1{,}6, \qquad x=-1{,}6.$$

Проверка. $5\cdot(-1{,}6)+14=-8+14=6$.
Значит, $x=-1{,}6$ есть корень уравнения.

§ 25. Решение задач с помощью уравнений.

В дальнейшем, по мере изучения алгебры, будет видно, какую огромную роль играют уравнения в решении задач. С помощью уравнений легко решаются многие задачи, которые с большим трудом или даже совсем не могут быть решены арифметически, причём арифметическое решение обычно бывает очень сложным и громоздким. Примеры таких задач будут даны в дальнейших разделах алгебры. Здесь же дадим примеры решения с помощью уравнений некоторых простых задач.

Задача 1. *Для класса были заготовлены тетради. Когда роздали* 48 *тетрадей, то их осталось* 32 *штуки. Сколько тетрадей было заготовлено?*

Составим уравнение по условию задачи. Число заготовленных тетрадей обозначим через x. Когда роздали 48 тетрадей, то их запас уменьшился на 48, то есть тетрадей стало

$$x-48.$$

Но в задаче сказано, что тетрадей осталось 32. Значит, остаток $x-48$ должен равняться 32, то есть

$$x-48=32.$$

Решим это уравнение. Неизвестное число — уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с разностью. Значит,

$$x=48+32, \text{ или } x=80.$$

Проверка. $80 - 48 = 32$.

Возникает вопрос: что означает отрицательное число, если оно получается в результате решения задачи?

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. *Я задумал число. Когда прибавил к нему 27 и результат разделил на 6, то получил 3. Какое число я задумал?*

1) Обозначим задуманное число через x.

2) Прибавив к нему 27, получим $x+27$.

3) Разделив результат на 6, получим $\frac{x+27}{6}$.

4) По условию задачи в итоге должно получиться 3. Значит,

$$\frac{x+27}{6}=3.$$

5) Решим это уравнение. Найдём $x+27$ как неизвестное делимое:

$$x+27=18.$$

Теперь найдём x как неизвестное слагаемое:

$$x=18-27, \quad x=-9.$$

6) Проверим подстановкой:

$$\frac{-9+27}{6}=\frac{18}{6}=3.$$

Итак, здесь число -9 является ответом на вопрос задачи. Я действительно задумал число -9, произвёл над ним указанные действия и получил 3. Отрицательные числа здесь являются допустимыми значениями для неизвестного.

Задача 2. *Ученик купил тетрадь за 7 коп. и несколько карандашей по 2 коп. за карандаш. Сколько карандашей он купил, если заплатил за всю покупку 3 коп.?*

1) Обозначим число купленных карандашей через x.

2) Тогда все карандаши стоят $2x$ копеек.

3) Карандаши и тетрадь вместе стоят $(2x+7)$ копеек.

4) По условию задачи:

$$2x+7=3.$$

5) Решаем уравнение:

$$2x = -4; \qquad x = -2.$$

Но нельзя купить «минус два карандаша». Число карандашей не может быть отрицательным. Отрицательные значения не являются допустимыми для неизвестного. Значит, полученное отрицательное число показывает, что задача не имеет решения. Это и понятно: нельзя за карандаши и тетрадь заплатить меньше, чем за одну тетрадь.

Задача 3. *Автомобиль идёт из города со скоростью 60 км в час. В настоящий момент он находится от города в 240 км. Через сколько часов автомобиль будет на расстоянии 120 км от города?*

Приняв за x часов время, через которое автомобиль будет в 120 *км* от города, последовательно получим:

$$60x + 240 = 120, \quad 60x = -120, \quad x = -2.$$

Можно сделать вывод, что и здесь отрицательный ответ указывает на отсутствие решения. Действительно, если автомобиль находится в данный момент в 240 *км* от города и продолжает удаляться от него, то никогда не наступит такой момент, когда автомобиль будет находиться в 120 *км* от города.

Но можно подойти к полученному ответу и по-другому. Условимся, как и раньше, время, отсчитываемое в будущее от настоящего момента, обозначать положительным числом, а время, отсчитываемое в прошлое, — отрицательным.

При этом условии для неизвестного будут допустимыми как положительные, так и отрицательные значения и полученный ответ -2 приобретает определённый смысл: он означает «2 часа назад». Действительно, 2 часа назад автомобиль находился от города на расстоянии

$$240 - 60 \cdot 2 = 120 \ (\textit{км}).$$

Итак, отрицательные значения неизвестного, полученные в результате решения задачи, или дают определённый ответ на вопрос задачи, или указывают на отсутствие решения, в зависимости от того, являются ли отрицательные значения допустимыми для неизвестного или нет.

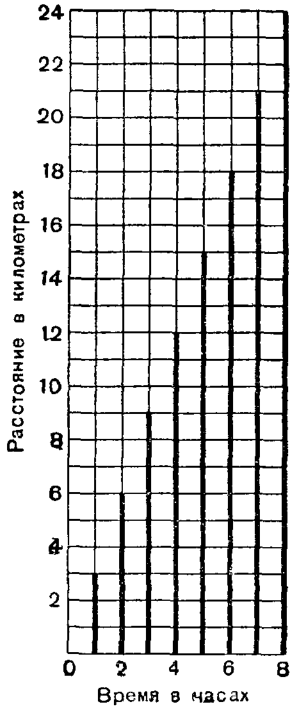
§ 26. Графики.

1. График равномерного движения. Решим задачу. *Пионеры в походе шли со скоростью 3 км в час. Какое расстояние они прошли за t часов?*

Если искомое расстояние обозначим через s, то получим:

$$s = 3t.$$

Давая t значения $1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ и т. д., найдём значения s, то есть расстояние, пройденное за 1 час, 2 часа, 3 часа и т. д.

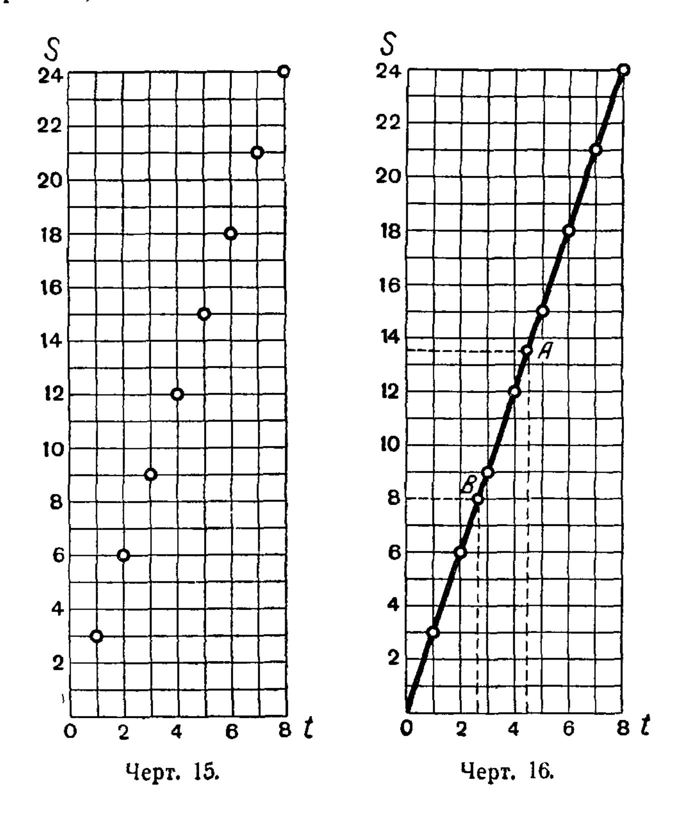


Черт. 14.

С помощью отрезков можно наглядно представить расстояния, пройденные за различные промежутки времени. На чертеже 14 проведены из одной точки два взаимно перпендикулярных луча, которые назовём г о р и з о н т а л ь н о й и в е р т и к а л ь н о й о с я м и. На горизонтальной оси отметим в часах время движения, выбрав некоторый отрезок (например, размер одной клетки), соответствующий одному часу. На вертикальной оси отметим расстояние в километрах (сторона одной клетки обозначает 1 *км*). Длины перпендикуляров, проведённых к горизонтальной оси из любой её точки, покажут расстояние, пройденное за указанный внизу промежуток времени. Величину этого расстояния можно определить, проведя из верхнего конца перпендикуляр к вертикальной оси.

Так как нас интересует только длина каждого перпендикуляра, то можно чертёж упростить, оставив только точки — верхние концы этих перпендикуляров (черт. 15).

Нетрудно проверить (приложив, например, линейку), что все эти точки расположены на одном прямолинейном луче. Если будем брать более мелкие промежутки времени, то новые точки расположатся на той же прямой между уже полученными точками. Проведём этот луч (черт. 16).



Черт. 15. Черт. 16.

Полученный луч является **графиком равномерного движения** со скоростью 3 *км* в час.

Перпендикуляр, проведённый к горизонтальной оси из любой точки графика, покажет расстояние, пройденное за время, которое указывает основание перпендикуляра.

По этому графику можно определить расстояние, пройденное за любой промежуток времени.

Пусть, например, мы хотим определить расстояние, пройденное за $4\frac{1}{2}$ часа. Найдя на горизонтальной оси точку $4\frac{1}{2}$, проведём к ней перпендикуляр до пересечения с графиком в точке A. Длина этого перпендикуляра изображает расстояние, пройденное за $4\frac{1}{2}$ часа. Величину этого расстояния $\left(13\frac{1}{2}\ \textit{км}\right)$ можно определить по отметкам на вертикальной оси.

По этому же графику можно решить и обратную задачу: определить, за какое время будет пройдено некоторое расстояние, например 8 *км*.

Из точки 8 на вертикальной оси проведём к ней перпендикуляр до пересечения с графиком в точке B. Из этой точки опустим перпендикуляр на горизонтальную ось. Нижний конец этого перпендикуляра и покажет время (приблизительно 2,7 часа), за которое был пройден путь 8 *км*.

2. **График температуры.** Следующая таблица показывает изменение температуры воздуха в один из ноябрьских дней с 12 часов ночи до 12 часов дня.

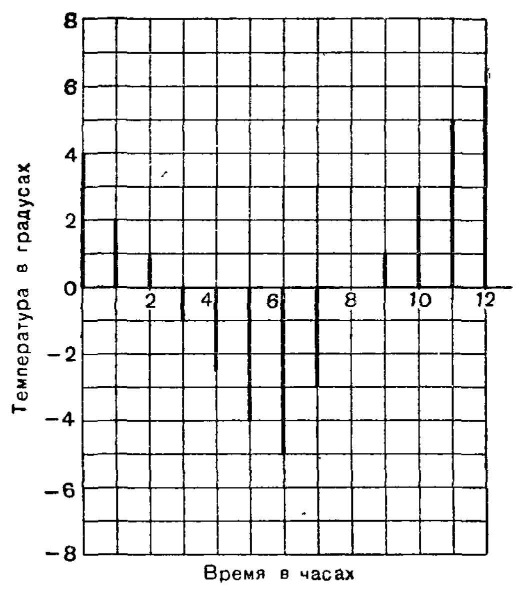
Нулём обозначен момент начала измерения, то есть 12 часов ночи.

Время в часах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура в градусах	4	2	1	−1	$-2\frac{1}{2}$	−4	−5	−3	0	1	3	5	6

Изменение температуры можно изобразить графически, откладывая в определённом масштабе на горизонтальной оси время в часах. Концы перпендикуляров, проведённых из точек на горизонтальной оси, покажут (тоже

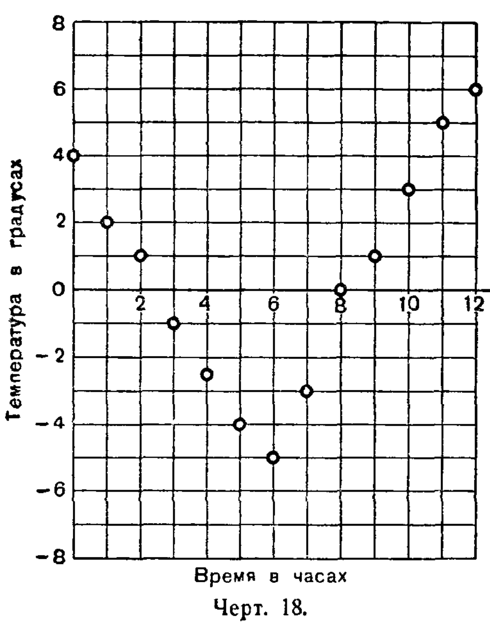
в определённом масштабе) соответствующую температуру (число градусов).

Но в таблице температур стоят не только положительные, но и отрицательные числа. Как отметить их на графике? Если величину, например, 4° мы изображали перпендикуляром, проведённым вверх от горизонтальной оси, то число —4° естественно изобразить перпендикуляром, проведённым вниз от этой оси. Значит, вертикальную ось мы должны продолжить вниз для отсчёта температур ниже нуля (черт. 17).

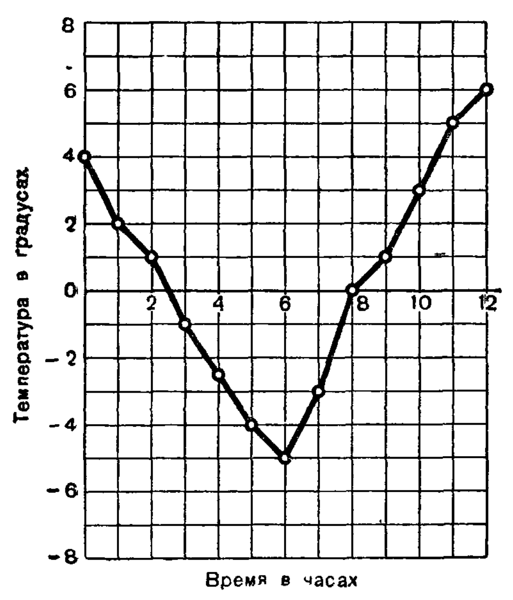


Черт. 17.

И здесь можно вместо перпендикуляров оставить только их концы (черт. 18). Если соединим последовательно эти точки отрезками прямых, то получим **график температуры** (черт. 19), по которому можно приблизительно определить температуру воздуха в любой момент от 12 часов ночи до 12 часов дня.



Черт. 18.



Черт. 19.

§ 27. Краткие исторические сведения.

(Из истории отрицательных чисел.)

Ещё несколько тысяч лет назад потребности в измерении привели к расширению множества натуральных чисел, которыми до тех пор пользовались люди. Были введены новые, дробные числа, с помощью которых стало возможно производить измерения (длин, площадей, веса и пр.) с любой степенью точности, допускаемой инструментами.

Не так обстояло дело с отрицательными числами. В практической деятельности людей не ощущалась потребность во введении отрицательных чисел, и они прочно вошли в математику и получили применение лишь в XVII веке.

Но в самой математике потребность в расширении числового множества путём введения новых, отрицательных чисел ощущалась уже давно, и по мере развития математической науки эта потребность становилась всё более настоятельной.

Так, ещё в III веке греческий математик Диофант при выполнении некоторых преобразований, например

$$(2x-3)(2x-3)=4x^2-12x+9,$$

фактически уже пользовался правилом умножения отрицательных чисел, которое он выражал так: «Отнимаемое, умноженное на прибавляемое, даёт в результате отнимаемое. Отнимаемое, умноженное на отнимаемое, даёт в результате прибавляемое».

Из этой формулировки видно, что Диофант ещё не признавал самостоятельного существования отрицательных чисел; для него они были прежними числами, «отнимаемыми» от какого-либо другого числа. Поэтому, если, например, при решении уравнения получался отрицательный корень, Диофант его просто отбрасывал как «недопустимый».

Но уже индийский учёный Брамагупта (VII век) в своих вычислениях свободно пользовался отрицательными числами и давал им наглядное истолкование. Он обозначал имущество положительными числами, а долг — отрицательными.

В этой наглядной форме он давал и правила действий с рациональными числами, например: «Сумма двух имуществ — имущество. Сумма двух долгов — долг. Сумма имущества и долга равна их разности, а если они равны, то нулю» и т. д.

Индийский же математик Бхаскара (XII век) пользуется степенью отрицательного числа. В его сочинении «Венец системы» говорится:

«Квадрат как положительного, так и отрицательного числа даёт положительное число, например:

$$(+5)^2=25 \text{ и } (-5)^2=25».$$

В Европе математики XVI века хотя и пользовались иногда отрицательными числами, всё же называли их «ложными» и «неясными», «меньшими, чем ничто» и т. п.

Лишь голландский математик Жирар (XVI—XVII века) пользуется отрицательными числами наравне с положительными. Так, решая уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

он приводит три его корня:

$$x_1 = +3, x_2 = +1, x_3 = -2.$$

Бурное развитие естествознания и техники в XVII веке предъявляло повышенные требования и к математике, требовало её дальнейшего развития и усовершенствования математического аппарата. Неприменение отрицательных чисел создавало излишние трудности в математических вычислениях и преобразованиях. Начиная с XVII века отрицательные числа прочно входят в математику и находят практические применения. Французский философ и математик Декарт даёт наглядное истолкование чисел с помощью точек числовой оси. Он пользуется отрицательными числами для графического изображения различных процессов и алгебраических выражений.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ.

§ 28. Одночлен и многочлен.

1. Рациональные алгебраические выражения. В предыдущих главах рассматривались пять действий над рациональными числами: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень.

В настоящей главе будем рассматривать алгебраические выражения, составленные с помощью этих пяти действий. Все такие выражения называются **рациональными**.

Определение 1. **Алгебраические выражения, составленные из чисел, обозначенных цифрами и буквами, с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, называются рациональными.**

Примеры рациональных выражений.

$$a+b; \quad a^2b; \quad \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}; \quad 0{,}25; \quad \frac{(a-b)^3+(a^2+b^2)}{3(a^2+b^2)};$$

$$a; \quad \frac{x+xy-y^2}{a-b}; \quad a+\frac{2}{b}; \quad \frac{4}{a-\frac{b}{a}}.$$

2. Целые и дробные выражения. Рассмотрим следующие рациональные выражения:

$$a^2-0{,}3ab+1; \quad \frac{5x}{4}; \quad a+\frac{2}{b}.$$

При рассмотрении различных выражений в алгебре обращают главное внимание на действия, которые надо произвести над числами, обозначенными буквами.

Первое и второе из этих выражений совсем не содержат действия деления на числа, обозначенные буквами. Такие выражения называются целыми.

Второе выражение содержит действие деления на число 4, обозначенное цифрой. Но мы можем, разделив сначала 5 на 4, записать это второе выражение так:

$$\frac{5}{4}x, \quad \text{или} \quad 1{,}25x.$$

Выражение

$$\frac{3x^2 - 4x + 5}{2}$$

также является целым; его можно представить в виде

$$\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}.$$

Наконец, третье выражение содержит деление на число, записанное буквой. (Говорят также, что это выражение имеет буквенный делитель.) Такие выражения называются дробными.

Ещё примеры дробных выражений:

$$\frac{x}{y+1}; \quad \frac{a+c}{4a}; \quad \frac{m+1}{m-1}; \quad 4+\frac{3}{5b}.$$

Определение 2. **Рациональное выражение называется целым, если оно не содержит деления на буквенное выражение.**

Определение 3. **Рациональное выражение называется дробным, если оно содержит деление на буквенное выражение.**

Можно короче сказать: рациональное алгебраическое выражение называется целым или дробным, смотря по тому, имеет или не имеет оно буквенного делителя.

3. **Одночлен.** Из целых выражений наиболее простыми считаются такие, которые содержат только действия умножения и возведения в степень, например:

$$2a; \quad 3a^2b; \quad \frac{4}{5}x^2y^2; \quad ab^2c^3; \quad -0{,}2^3.$$

Такие выражения называются одночленами.

Определение 4. **Алгебраическое выражение, которое содержит только действия умножения и возведения в степень, называется одночленом.**

Таким образом, *одночлен представляет собой произведение числового множителя и букв, каждая из которых взята в определённой степени.*

Примечание. Так как возведение в степень есть частный случай умножения (мы можем, например, a^3 записать в виде *aaa*), то можно сказать, что *одночлен содержит только одно действие — умножение.*

Выражение, состоящее только из одной буквы, также считается одночленом.

Одночленом считается и всякое отдельное число, записанное цифрами.

Выражение вида $\frac{3a^2b}{4}$ тоже считается одночленом, так как хотя оно и содержит деление, но делитель 4 мы можем отнести к числовому множителю и записать выражение так:

$$\frac{3}{4}a^2b, \quad \text{или} \quad 0{,}75a^2b.$$

4. **Многочлен.** Несколько одночленов, соединённых знаками сложения и вычитания, образуют новое алгебраическое выражение, которое называется многочленом.

Например: $3x^2 - 5xy + 6y^2 - 8$.

Мы уже знаем, что всегда вычитание можно заменить сложением, и всякое выражение, в которое входят сложение и вычитание, представляет собой алгебраическую сумму. Например, приведённое выше выражение можно записать так:

$$3x^2 + (-5xy) + 6y^2 + (-8).$$

Определение 5. **Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется многочленом.**

Каждый одночлен, входящий в состав многочлена, называется его членом.

Многочлен, состоящий из двух членов, называется также двучленом; многочлен, состоящий из трёх членов, называется трёхчленом и т. д.

Примеры двучленов:

$$x^2 + 1; \quad a + b; \quad 3a^2b - 4b^2c.$$

Примеры трёхчленов:

$$x^2 + x + 1; \quad 3y^3 - 4ay^2 + 4.$$

Одночлен считается частным случаем многочлена: это многочлен, состоящий из одного члена.

Примечание. Изучив действия над одночленами и многочленами, мы сможем любое целое алгебраическое выражение представить в виде алгебраической суммы одночленов (в частности, может получиться одночлен). Поэтому всякое целое выражение, как например

$$(x+y)b; \qquad 2(a^2+3b^2)-6b^2; \qquad m(m+n)-m^2,$$

считается многочленом. Алгебраическая сумма одночленов есть так называемый нормальный (обычный), простейший вид целого алгебраического выражения. С этого простейшего вида мы и начнём изучать многочлены.

Дробные рациональные выражения, как например

$$\frac{a}{b}; \quad \frac{x-y}{x}; \quad \frac{2x^2-3}{4x^3+5}+x,$$

не являются целыми, поэтому их нельзя считать многочленами, в частности их нельзя считать одночленами.

§ 29. Тождества и тождественные преобразования.

Пусть даны два алгебраических выражения:

$$1)\ 2(x+5)-4 \quad \text{и} \quad 2)\ 2x+6.$$

Составим таблицу значений каждого из этих выражений при различных числовых значениях буквы x.

x	-7	-5	-3	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	5	7	20	50
$2(x+5)-4$	-8	-4	0	2	4	6	8	9	16	20	46	106
$2x+6$	-8	-4	0	2	4	6	8	9	16	20	46	106

Мы видим, что при всех тех значениях, которые давались букве x, значения обоих выражений оказывались равными. То же будет и при всяком другом значении x.

Чтобы убедиться в этом, преобразуем первое выражение. На основании распределительного закона запишем:

$$2(x+5)-4=2x+2\cdot5-4.$$

Произведя над числами указанные действия, получим:

$$2x + 10 - 4 = 2x + 6.$$

Итак, первое выражение после его упрощения оказалось совершенно таким же, как и второе выражение.

Теперь ясно, что при любом значении x значения обоих выражений равны.

Выражения, значения которых равны при любых значениях входящих в них букв, называются тождественно равными или тождественными.

Значит, $2(x+5)-4$ и $2x+6$ — тождественные выражения.

Сделаем одно важное замечание. Возьмём выражения:

$$1)\ \frac{x^2-9}{x-3} \quad \text{и} \quad 2)\ x+3.$$

Составив таблицу, подобную предыдущей, убедимся, что оба выражения при любом значении x, кроме $x=3$, имеют равные числовые значения. Только при $x=3$ второе выражение равно 6, а первое теряет смысл, так как в знаменателе получается нуль. (Вспомним, что на нуль делить нельзя.) Можно ли сказать, что эти выражения тождественны?

Мы раньше условились, что каждое выражение будем рассматривать только при допустимых значениях букв, то есть при тех значениях, при которых выражение не теряет смысла. Значит, и здесь, сравнивая два выражения, принимаем во внимание только те значения букв, которые допустимы для обоих выражений. Поэтому значение $x=3$ мы должны исключить. А так как при всех остальных значениях x оба выражения имеют одно и то же числовое значение, то мы вправе считать их тождественными.

На основании сказанного дадим такое определение тождественных выражений:

1. Выражения называются тождественными, если они имеют одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв.

Если два тождественных выражения соединим знаком равенства, то получим тождество. Значит:

2. Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв.

Мы уже раньше встречались с тождествами. Так, например, тождествами являются все равенства, которыми мы выражали основные законы сложения и умножения.

Например, равенства, выражающие переместительный закон сложения

$$a+b=b+a$$

и сочетательный закон умножения

$$(ab)c=a(bc),$$

справедливы для любых значений букв. Значит, эти равенства являются тождествами.

Тождествами считаются также все верные арифметические равенства, например:

$$2+5=7; \qquad 3\cdot5\cdot6=90; \qquad (3+6)\cdot7=63.$$

В алгебре часто приходится какое-либо выражение заменять другим, ему тождественным. Пусть, например, требуется найти значение выражения

$$37a+36a+27a$$

при $a=6{,}53$.

Мы значительно облегчим вычисления, если данное выражение заменим выражением, ему тождественным. На основании распределительного закона можем записать:

$$37a+36a+27a=(37+36+27)a.$$

Но числа в скобках дают в сумме 100. Значит, имеем тождество:

$$37a+36a+27a=100a$$

Подставив в правую часть его 6,53 вместо a, сразу (в уме) найдём числовую величину (653) данного выражения.

Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется тождественным преобразованием этого выражения.

Напомним, что всякое алгебраическое выражение при любых допустимых значениях букв является некоторым

числом. Отсюда следует, что к алгебраическим выражениям применимы все законы и свойства арифметических действий, которые были приведены в предыдущей главе. Итак, *применение законов и свойств арифметических действий преобразует данное алгебраическое выражение в тождественное ему выражение.*

§ 30. Коэффициент.

Мы знаем, что одночлен представляет собой произведение числового (записанного цифрами) множителя и букв, каждая из которых берётся в определённой степени. Числовой множитель имеет специальное название — коэффициент и ставится обычно на первое место. Так, например, число 4 является коэффициентом одночлена $4a^2xy$. Если произведение содержит несколько числовых множителей (целых или дробных), то обычно (пользуясь переместительным и сочетательным законами умножения) перемножают их отдельно и полученное произведение ставят впереди буквенных сомножителей.

Пусть, например, дано выражение $\frac{3a^2b \cdot 4xy^3}{5}$; перепишем его в таком виде:

$$3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{5} a^2bxy^3 = \frac{12}{5} a^2bxy^3.$$

Коэффициентом будет число $\frac{12}{5}$.

Определение. **Числовой множитель, стоящий впереди буквенных множителей, называется коэффициентом.**

Если выражение содержит только буквенные множители, то говорят, что его коэффициент равен единице. Действительно, например, выражения ab и $1 \cdot ab$ равны между собой, так как от умножения на единицу число не изменяется. Поэтому коэффициент единица обычно не пишется.

Коэффициент -1 также не пишется, а ставится знак «—» перед всем произведением. Например, $(-1)x^2y = -x^2y$. Приведём несколько примеров.

Пример 1.

$$-4a^2b^3.$$

Коэффициент этого одночлена равен -4.

Пример 2. Алгебраическое выражение $2a(x+y)$ записано в виде произведения, поэтому число 2 можно считать его коэффициентом.

Пример 3. Выражение $2a^2b-3ab^4+5ab$ есть многочлен, в котором коэффициент первого члена равен 2, коэффициент второго -3, а коэффициент третьего 5.

Иногда в произведении, содержащем различные буквенные (и числовые) множители, выбирают одну или несколько букв и считают эти буквы главными.

Если заранее указано, какие буквы выбраны главными, то в данном произведении можно выделить степени главных букв и написать впереди этих букв произведение всех остальных сомножителей. Это произведение называется коэффициентом. Поясним это на примерах.

1. Примем x за главную букву, тогда коэффициент одночлена $2ax$ будет равен $2a$; коэффициент одночлена $-5abx^2$ равен $-5ab$.

2. Примем за главные буквы u и v, тогда коэффициент одночлена $3lmu^2v^2$ равен $3lm$; коэффициент одночлена $5aubv^3=5abuv^3$ (переставляем местами сомножители) равен $5ab$.

В одночлене $4ab$ выражение $4a$ — коэффициент при b (если главная буква b), а $4b$ — коэффициент при a (если главная буква a). В последнем случае лучше записать $4ba$.

Итак, мы видим, что первоначальное понятие о коэффициенте как множителе, выраженном цифрами, можно расширить: коэффициентом может быть не только число, записанное цифрами, но и буквенное выражение.

§ 31. Расположенные многочлены.

Пусть многочлен содержит только одну букву в различных степенях, например:

$$8a-3a^3+5a^4-1. \quad (1)$$

Пользуясь переместительным законом сложения, мы можем расположить его члены по убывающим степеням буквы a:

$$5a^4 - 3a^3 + 8a - 1. \qquad (2)$$

Тот же многочлен (1), расположенный по возрастающим степеням буквы a, примет вид:

$$-1 + 8a - 3a^3 + 5a^4. \qquad (3)$$

Расположение многочлена по степеням данной буквы есть тождественное преобразование этого многочлена.

В дальнейшем, говоря о расположении членов многочлена, мы будем подразумевать расположение по убывающим степеням главной буквы.

Если многочлен содержит две или несколько букв, то выбирают одну из них, которую считают главной, и располагают многочлен по степеням этой главной буквы. Например, выражение

$$3x^3 - 2ax^2 + a^4x - 5a^2 \qquad (4)$$

является многочленом, расположенным по убывающим степеням буквы x.

Первый член расположенного многочлена, содержащий главную букву в наивысшей степени, называется старшим, а последний — низшим членом этого многочлена. Степень старшего члена называется степенью и самого многочлена (по отношению к главной букве).

Многочлен (2) — четвёртой, а (4) — третьей степени относительно главной буквы. Если низший член совсем не содержит главной буквы, то он называется свободным членом.

В многочлене (2) 5 есть коэффициент при a^4; -3 — коэффициент при a^3, 8 — коэффициент при a; -1 — свободный член.

В многочлене (4) 3 — коэффициент при x^3, $-2a$ — коэффициент при x^2; a^4 — коэффициент при x; $-5a^2$ — свободный член.

§ 32. Приведение подобных членов.

З а д а ч а 1. *Тетрадь стоит a копеек. Коля купил 3 тетради, Вера 7, а Вася 5 тетрадей.* 1) *Сколько заплатил каждый?* 2) *Сколько стоили все купленные тетради?*

Ответом на первый вопрос будут выражения:

$$3a;\ 7a;\ 5a \text{ (копеек).} \qquad (1)$$

Ответом на второй вопрос будет сумма этих выражений:

$$(3a+7a+5a) \text{ копеек.} \qquad (2)$$

Это последнее выражение можно упростить. На основании распределительного закона запишем:

$$3a+7a+5a=(3+7+5)a=15a.$$

Выражение (2) мы заменили тождественным ему выражением $15a$.

При любом значении a значение выражения $15a$ вычисляется быстрее и легче, чем значение выражения (2).

О п р е д е л е н и е 1. **Одинаковые или отличающиеся только коэффициентами одночлены называются подобными.**

Например, одночлены $5ax^2y$ и $10ax^2y$ подобны, а одночлены $3ax^2y$ и $3a^2x^2y$ не подобны.

В равенстве $3a+7a+5a=15a$ алгебраическая сумма подобных членов заменена одним членом, тождественным этой сумме.

О п р е д е л е н и е 2. **Замена алгебраической суммы подобных членов одним членом, тождественным этой сумме, называется приведением подобных членов.**

Таким образом, приведение подобных членов есть т о ж д е с т в е н н о е п р е о б р а з о в а н и е.

П р а в и л о. *Чтобы привести подобные члены, надо сложить их коэффициенты и к полученной сумме приписать (в виде сомножителя) то же буквенное выражение.*

П р и м е р. $3a^2b-a^2b+7{,}4a^2b=(3-1+7{,}4)a^2b=$ $=9{,}4a^2b.$

(Проверить подстановкой: $a=2;\ b=5.$)

В дальнейшем, как правило, мы будем упрощать всякий данный многочлен, сделав в нём с самого начала

приведение подобных членов (если они были), так что окончательно получится такой многочлен, в котором никакие два члена не подобны.

Пример. Возьмём многочлен

$$2x^2 - x + 4x^3 + 2x + 4x^2 + 7$$

и выполним следующие тождественные преобразования.

Воспользуемся переместительным и сочетательным законами сложения: на первом месте напишем старший член $4x^3$ — он не имеет подобных; затем выпишем два подобных члена, содержащих x^2 (первый и пятый); затем выпишем подобные члены, содержащие x (второй и четвёртый), и, наконец, напишем свободный член:

$$4x^3 + (2x^2 + 4x^2) + (-x + 2x) + 7.$$

Окончательно получим:

$$4x^3 + 6x^2 + x + 7.$$

Мы сделали приведение подобных членов и вместе с тем расположили члены по убывающим степеням буквы x.

§ 33. Сложение одночленов и многочленов.

1. Сложение одночленов. Пусть требуется сложить одночлены:

$$13x^2;\ -8x;\ 4x^3;\ -5;\ -3x.$$

Получим:

$$13x^2 + (-8x) + (+4x^3) + (-5) + (-3x).$$

Полученное выражение является алгебраической суммой. Согласно введённому условию (§ 16) мы можем знак сложения везде опустить и написать короче:

$$13x^2 - 8x + 4x^3 - 5 - 3x.$$

В этом выражении имеется два подобных члена.

Приведём их и заодно расположим многочлен по убывающим степеням относительно x:

$$4x^3 + 13x^2 - 11x - 5.$$

(Проверить подстановкой в данные одночлены и в полученную сумму значений: 1) $x = 1$; 2) $x = -2$.)

Значит, мы можем вывести такое правило:

Чтобы сложить одночлены, достаточно записать их (в виде алгебраической суммы) один за другим с их знаками.

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, то их надо привести.

2. Сложение многочленов. Решим задачу. *В одной корзине было x яблок, в другой на y яблок больше, чем в первой, а в третьей на 27 яблок меньше, чем во второй. Сколько яблок было во всех трёх корзинах?*

Решение.

1) В первой корзине было x яблок.

2) Во второй корзине было $(x+y)$ яблок.

3) В третьей корзине было $(x+y-27)$ яблок.

4) В трёх корзинах было $[x+(x+y)+(x+y-27)]$ яблок.

Полученный ответ представляет собой сумму одночлена и двух многочленов.

Упростим этот ответ. Мы знаем, что каждое из выражений $x+y$ и $x+y-27$ является алгебраической суммой. Поэтому по правилу прибавления суммы можем записать:

$$x+(x+y)+(x+y-27)=x+x+y+x+y-27.$$

После приведения подобных членов получим окончательно:

$$3x+2y-27.$$

Определить, сколько было яблок в корзинах, если:

1) $x=40$; $y=30$; 2) $x=35$; $y=42$.

Значит, мы можем вывести такое правило для сложения многочленов:

Чтобы сложить многочлены, надо записать последовательно (в виде алгебраической суммы) все их члены с их знаками.

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, их надо привести.

3. Раскрытие скобок. При решении предыдущей задачи пришлось раскрывать скобки, перед каждой из которых стоял знак плюс. Значит, можно сделать вывод:

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с их знаками.

Примечание. Если выражение начинается со скобки, перед которой нет никакого знака, то подразумевается знак плюс, например:

$$(a^2 - 3a + 2) + (3a - 7) = a^2 - 3a + 2 + 3a - 7 = a^2 - 5.$$

4. Заключение в скобки. Иногда бывает нужно, наоборот, заключить многочлен или часть его в скобки. Так мы поступали, делая приведение подобных членов (см. пример предыдущего параграфа). Возьмём такой пример. Пусть надо вычислить выражение:

$$136 + 258 - 238.$$

Очевидно, что здесь выгоднее сначала вычесть 238 из 258 и разность 20 прибавить к 136. Вычисления легко и быстро выполняются в уме. Чтобы показать это, заключим второй и третий члены в скобки:

$$136 + (258 - 238).$$

Пусть вообще нужно заключить в скобки многочлен или часть его и перед скобкой поставить знак плюс. Будем руководствоваться следующим правилом:

Чтобы заключить многочлен в скобки со знаком плюс перед ними, надо записать в скобках все члены многочлена с их знаками:

$$a - b + c = +(a - b + c).$$

Убедиться в верности этого равенства легко, раскрыв скобки по правилу, изложенному в п. 3.

5. Сложение расположенных многочленов. Если многочлены расположены по степеням одной и той же буквы (оба по возрастающим или оба по убывающим), то их сложение удобнее производить следующим образом: подписывают один многочлен под другим так, чтобы подобные члены находились один под другим; после этого сразу делают приведение подобных членов и записывают окончательный результат.

Пример 1.

$$
+\begin{array}{r}
3x^4 - 7x^3 + x^2 - 11x - 5 \\
2x^4 - 4x^3 \qquad + 14x + 2 \\
\hline
5x^4 - 11x^3 + x^2 + 3x - 3
\end{array}
$$

Так же производится сложение расположенных многочленов и тогда, когда они содержат более одиой буквы.

Пример 2.

$$
+\begin{array}{r}
3a^3 - 5a^2b + 7ab^2 + b^3 \\
-5a^3 \qquad - 6ab^2 + 4b^3 \\
\hline
-2a^3 - 5a^2b + ab^2 + 5b^3
\end{array}
$$

§ 34. Противоположные многочлены.

Мы знаем, что два противоположных числа имеют одну и ту же абсолютную величину и противоположные знаки.

Мы знаем также, что сумма двух противоположных чисел равна нулю [например, $5+(-5)=0$], и, обратно, если сумма двух чисел равна нулю, то эти числа противоположные.

Рассмотрим два таких многочлена, которые состоят из членов, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку.

Возьмём, например, многочлены:

$$x^2 + 2ax - 3a^2 \text{ и } -x^2 - 2ax + 3a^2.$$

Сложив эти многочлены

$$
+\begin{array}{r}
x^2 + 2ax - 3a^2 \\
-x^2 - 2ax + 3a^2 \\
\hline
0
\end{array},
$$

получим сумму, тождественно равную нулю, то есть равную нулю при всех значениях букв a и x.

Два многочлена, состоящие из членов, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку, называются **противоположными**.

Сумма двух противоположных многочленов тождественно равна нулю, так как равна нулю сумма каждых его двух противоположных членов.

Из сказанного вытекает, что *значения двух противоположных многочленов противоположны* (конечно, при одинаковых значениях букв).

Итак, какие бы числовые значения (одинаковые для обоих многочленов) мы ни давали входящим в них буквам, получим два взаимно противоположных числа. В самом деле, так как сумма значений двух противоположных многочленов равна нулю, то эти значения являются противоположными числами.

Примечание. Сказанное относится и к одночлену, как к многочлену, имеющему только один член.

§ 35. Вычитание одночленов и миогочленов.

1. Вычитаиие одночленов. Пусть из одночлена $5a^2b$ требуется вычесть одночлен $3ab^2$. Запишем:

$$5a^2b-(+3ab^2).$$

Одночлены $3ab^2$ и $-3ab^2$ являются противоположными, то есть имеют противоположные числовые значения при любых значениях a и b. Но мы знаем, что вычитание любого числа можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому.

Значит,

$$5a^2b-(+3ab^2)=5a^2b+(-3ab^2).$$

По правилу сложения одночленов получим:

$$5a^2b+(-3ab^2)=5a^2b-3ab^2.$$

Итак, имеем:

$$5a^2b-(+3ab^2)=5a^2b-3ab^2.$$

Проверим правильность нашего вывода, **сложив разность** с вычитаемым:

$$5a^2b-3ab^2+(+3ab^2)=5a^2b.$$

Мы получили уменьшаемое. Значит, вычитание произведено верно.

Отсюда выводим такое правило:

Чтобы вычесть одночлен, достаточно приписать его с противоположным знаком к уменьшаемому.

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, их надо привести.

2. **Вычитание многочленов.** Пусть требуется из многочлена $5x^2-3xy+y^2$ вычесть многочлен $6x^2-8xy+y^3$. Надо найти такой третий многочлен — разность, который в сумме с вычитаемым $6x^2-8xy+y^3$ даст многочлен, тождественно равный уменьшаемому $5x^2-3xy+y^2$. Если из значения уменьшаемого вычесть значение вычитаемого, то должно получиться значение разности. Но мы знаем: чтобы вычесть какое-либо число, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Прибавим к многочлену $5x^2-3xy+y^2$ многочлен $-6x^2+8xy-y^3$, противоположный вычитаемому, тогда получим:

$$(5x^2-3xy+y^2)-(6x^2-8xy+y^3)=$$
$$=(5x^2-3xy+y^2)+(-6x^2+8xy-y^3)=$$
$$=5x^2-3xy+y^2-6x^2+8xy-y^3=$$
$$=-x^2+5xy+y^2-y^3.$$

Убедимся, что вычитание выполнено правильно; для этого сложим полученный многочлен с многочленом вычитаемым:

$$(-x^2+5xy+y^2-y^3)+(6x^2-8xy+y^3)=$$
$$=-x^2+5xy+y^2-y^3+6x^2-8xy+y^3=$$
$$=5x^2-3xy+y^2.$$

Получили уменьшаемое. Отсюда выведем правило:

Чтобы вычесть многочлен, достаточно приписать к уменьшаемому все члены вычитаемого с противоположными знаками.

Если в полученном выражении окажутся подобные члены, их надо привести.

3. **Раскрытие скобок.** Из сказанного в § 34 о противоположных многочленах можно вывести следствие:

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать с противоположными знаками (без скобок) все члены, стоящие в скобках:

$$-(a-b+c)=-a+b-c.$$

4. Заключение в скобки. Иногда бывает нужно заключить многочлен или его часть в скобки, поставив перед скобкой знак минус. Будем руководствоваться следующим правилом:

Чтобы заключить многочлен в скобки со знаком минус перед ними, надо записать в скобках все члены многочлена, взяв их с противоположными знаками:

$$a-b+c=-(-a+b-c).$$

Убедиться в правильности этого равенства легко, раскрыв в правой части скобки по правилу, изложенному в п. 3.

Пример. Вычислить выражение:

$$368-179+149.$$

Заключим второй и третий члены в скобки, поставив перед ними знак минус. Согласно правилу получим:

$$368-(179-149).$$

Начиная с вычитания в скобках, легко произведём в уме все вычисления.

5. Вычитание расположенных многочленов. Вычитание расположенных многочленов выполняется так: у вычитаемого многочлена меняют знаки всех членов на противоположные, подписывают его под уменьшаемым так же, как и при сложении, и делают приведение подобных членов.

Пример.

$$(8x^4-3x^3+7x^2+x-18)-(5x^4-6x^3+3x^2+4x-7).$$

Располагаем действие так:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 8x^4-3x^3+7x^2+\ x-18 \\ -5x^4+6x^3-3x^2-4x+\ 7 \end{array} \\ \hline 3x^4+3x^3+4x^2-3x-11 \end{array}$$

§ 36. Умножение одночленов.

1. Умножение степеней одного и того же основания. Вычислим выражение $2^3 \cdot 2^2$:

$$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

Итак,

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$$

Действительно,

$$2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5.$$

Точно так же

$$3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$

$$a^2 \cdot a^4 = aaaaaa = a^6.$$

Мы видим, что показатель в произведении каждый раз равен сумме показателей в сомножителях (в частности, вспомним, что $a = a^1$). Это и понятно: ведь каждый раз основание степени приходится брать сомножителем столько раз, каков показатель в первом сомножителе, и ещё столько раз, каков показатель во втором сомножителе.

Следовательно, в произведении равный сомножитель будет повторяться столько раз, сколько единиц содержит сумма показателей сомножителей.

Если буквами m и n обозначить любые целые положительные (натуральные) числа, то это можно записать так:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Отсюда можно вывести такое правило:

Правило. ***При умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются, а основание остаётся прежним.***

Правило остаётся то же, если перемножаются не два, а три и более сомножителей, например:

$$2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+2+3} = 2^7.$$

В общем виде:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

2. Умножение одночленов. Пусть требуется перемножить одночлены:

$$3a^2b^3c \text{ и } 5a^3bc^2d.$$

По правилу умножения на произведение имеем:

$$3a^2b^3c\cdot 5\cdot a^3\cdot b\cdot c^2\cdot d.$$

Воспользовавшись переместительным и сочетательным законами, можем это произведение записать так:

$$(3\cdot 5)(a^2\cdot a^3)(b^3\cdot b)(c\cdot c^2)d.$$

Произведя умножение в каждой скобке, получим окончательно:

$$15a^5b^4c^3d.$$

Итак,

$$3a^2b^3c\cdot 5a^3bc^2d=15a^5b^4c^3d.$$

(Проверить подстановкой: $a=1$; $b=1$; $c=2$; $d=5$.)

Если надо перемножить более двух одночленов, то поступаем таким же образом, например:

$$2x^2y\cdot 0{,}5x^3y\cdot 4y^2z^2=(2\cdot 0{,}5\cdot 4)(x^2\cdot x^3)(y\cdot y\cdot y^2)z^2=4x^5y^4z^2.$$

Отсюда видно, что произведение одночленов есть одночлен, который составляется по следующему правилу:

При перемножении одночленов их коэффициенты перемножаются, показатели степеней одинаковых букв, содержащихся в обоих сомножителях, складываются, а буквы, входящие только в один сомножитель, берутся в произведении с их показателями.

Пример.

$$7x^2y^2z^3\cdot 2x^3y^2=14x^5y^4z^3.$$

§ 37. Умножение многочлена на одночлен.

Пусть требуется умножить многочлен

$$3a^3-5a^2b+6a^2c \text{ на одночлен } 4ab^2.$$

Многочлен представляет собой алгебраическую сумму. Поэтому на основании распределительного закона можно записать:

$$(3a^3-5a^2b+6a^2c)\cdot 4ab^2=3a^3\cdot 4ab^2-5a^2b\cdot 4ab^2+$$
$$+6a^2c\cdot 4ab^2.$$

Произведя затем умножение по правилу умножения одночленов, получим:

$$(3a^3 - 5a^2b + 6a^2c) \cdot 4ab^2 = 12a^4b^2 - 20a^3b^3 + 24a^3b^2c.$$

Отсюда выводим правило:

Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример. Умножить многочлен

$4x^2yz - 7xy^2z^2 + 3x^2yz^2$ на одночлен $-5x^2yz$.

Имеем:

$$(4x^2yz - 7xy^2z^2 + 3x^2yz^2)(-5x^2yz) =$$
$$= -20x^4y^2z^2 + 35x^3y^3z^3 - 15x^4y^2z^3.$$

§ 38. Умножение многочленов.

Пусть требуется перемножить многочлены:

$$a + b - c \text{ и } m - n.$$

Их произведение будет:

$$(a + b - c)(m - n).$$

Нам нужно алгебраическую сумму $a + b - c$ умножить на число $m - n$.

По правилу умножения суммы можем записать:

$$a(m - n) + b(m - n) - c(m - n).$$

Применив распределительный закон, получим:

$$(am - an) + (bm - bn) - (cm - cn).$$

Наконец, раскрыв скобки, получим окончательно:

$$am - an + bm - bn - cm + cn.$$

Итак, имеем:

$$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn.$$

Мы видим, что последнее выражение получилось после того, как каждый член множимого $a + b - c$ умножили на каждый член множителя $m - n$.

Отсюда выводим правило:

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить

на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Число членов произведения. Предположим, что в множимом 5 членов, в множителе 3. Умножив все члены множимого на первый член множителя, получим в произведении 5 членов; умножив на второй и третий члены миожителя, получим еще 2 раза по пять членов. Всего получим 15 членов.

Число членов произведения (до приведения подобных членов) равно числу членов множимого, умноженному на число членов множителя.

Правило умножения многочленов можно применить для упрощения арифметических вычислений.

Например, пусть надо перемножить два числа, у которых число десятков одинаково, а единицы в сумме дают 10, например: 43 и 47; 62 и 68; 103 и 107; 51 и 59.

Обозначим число десятков обоих чисел через a, а число единиц у одного числа — через b, у другого — через c. Тогда числа запишутся так: $10a+b$ и $10a+c$.

Перемножим их по правилу умножения многочленов:

$$(10a+b)(10a+c)=100^2+10ab+10ac+bc=$$
$$=100a^2+10a(b+c)+bc.$$

Но по условию $b+c=10$.

Сделав замену, получим:

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+100a+bc=100a(a+1)+bc.$$

Эта формула позволяет быстро вычислять в уме произведение двух чисел, у которых число десятков одинаково, а сумма единиц равна десяти; для вычисления произведения надо число десятков умножить на число, единицей большее, и к результату приписать произведение единиц, например:

$$43\cdot47=4\cdot5\cdot100+3\cdot7=2021;$$
$$62\cdot68=6\cdot7\cdot100+2\cdot8=4216;$$
$$103\cdot107=10\cdot11\cdot100+3\cdot7=11021.$$

§ 39. Умножение расположенных многочленов.

Покажем на примере, как производится умножение расположенных многочленов.

$$\begin{array}{rrrrr}
\times & 3x^2 & -2ax & +5a^2 & & \\
 & -x^2 & +3ax & +4a^2 & & \\
\hline
+ & -3x^4 & +2ax^3 & -5a^2x^2 & & \\
 & & 9ax^3 & -6a^2x^2 & +15a^3x & \\
 & & & 12a^2x^2 & -8a^3x & +20a^4 \\
\hline
 & -3x^4 & +11ax^3 & +a^2x^2 & +7a^3x & +20a^4
\end{array}$$

Из этого примера видим, что многочлены располагаются один под другим (оба многочлена расположены по убывающим степеням буквы x).

Все члены множимого умножаются на первый член множителя, и результат записывается в строку под чертой. Затем все члены множимого умножаются на второй член множителя, и результат записывается во второй строке так, чтобы подобные члены оказались друг под другом.

Так же записываются произведения всех членов множимого на третий член множителя и так далее до конца.

В результате получается столько строк, сколько членов в множителе, причём все подобные члены окажутся в одном столбце.

Эти подобные члены приводятся, и окончательный результат записывается внизу под чертой. В итоге получится тоже расположенный многочлен.

(Проверить подстановкой в данные многочлены и в произведение значений: 1) $x=1$, $a=1$; 2) $x=1$; $a=-1$.)

Приведём ещё пример:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{l} 2x^3-5x-4 \\ 3x^2-7x+8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrrrr} 6x^5 & & -15x^3 & -12x^2 & & \\ + \quad & -14x^4 & & +35x^2 & +28x & \\ & & 16x^3 & & -40x & -32 \end{array} \\ \hline 6x^5-14x^4+x^3+23x^2-12x-32 \end{array}$$

Умножив $2x^3$ на $3x^2$, получили $6x^5$ и записали это произведение. Умножив $-5x$ на $3x^2$, получили $-15x^3$. Для записи этого произведения мы отступили вправо, оставив после $6x^5$ свободное место на тот случай, если в последующих произведениях окажется член, содержащий x^4 (так оно и случилось). В дальнейшем опять подписывали подобные члены под подобными.

(Проверить подстановкой: $x=1$ и $x=-1$.)

Рассматривая приведённые примеры умножения двух расположенных многочленов, можно сделать следующие выводы.

1. *Старший член произведения равен произведению старших членов перемножаемых многочленов.*

Действительно, перемножая члены с наибольшими показателями главной буквы, мы и в произведении получим член с наибольшим показателем при этой букве.

Других членов с тем же показателем мы получить в произведении не можем, так как во всех остальных произведениях хотя бы один из перемножаемых членов будет иметь показатель меньший, чем показатель в старшем члене того же многочлена.

Рассуждая подобным же образом, найдём:

2. *Низший член произведения равен произведению низших членов перемножаемых многочленов.*

Таким образом, старший и низший члены произведения не могут иметь подобных членов. Следовательно, когда мы будем приводить в полученном произведении подобные члены, то старший и низший члены непременно останутся; остальные же — все или некоторые — после приведения могут сократиться. Отсюда следует:

3. *Произведение двух многочленов, если оба они не одночлены, не может иметь менее двух членов.*

Пример.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} a^3 - 2a^2 + 4a - 8 \\ a + 2 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{rr} a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a & \\ 2a^3 - 4a^2 + 8a & - 16 \end{array} \\ \hline a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad - 16 \end{array}$$

После приведения подобных членов получили в произведении $a^4 - 16$, то есть остались только старший и низший члены. Сумма остальных тождественно равна нулю.

(Проверить подстановкой: $a = 3$.)

§ 40. Возведение одночленов в степень.

1. Возведение степени в степень. Возведём a^3 в квадрат и в куб. Получим:

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6;$$
$$(a^3)^3 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^9.$$

Точно так же:

$$(x^2)^4 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^8$$

Вообще,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} = a^{mn}.$$

Значит, $(a^m)^n = a^{mn}$.

(Проверить: 1) при $a=2$, $m=2$, $n=3$; 2) при $a=-3$, $m=2$, $n=2$.)

Мы получили правило, которое кратко можно сформулировать так:

При возведении степени в степень показатели перемножаются, а основание не изменяется.

2. Возведение в степень одночленов. Возведём одночлен $4a^2bc^3$ в квадрат и в куб. По правилу умножения одночленов будем иметь:

$$(4a^2bc^3)^2 = 4a^2bc^3 \cdot 4a^2bc^3 = 16a^4b^2c^6.$$

$$(4a^2bc^3)^3 = 4a^2bc^3 \cdot 4a^2bc^3 \cdot 4a^2bc^3 = 64a^6b^3c^9.$$

Отсюда можем вывести такое правило:

Чтобы возвести в степень одночлен, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить.

Пример.

$$(2x^2y^3z)^4 = 16x^8y^{12}z^4.$$

(Проверить подстановкой: $x=1$, $y=-1$, $z=2$.)

§ 41. Формулы сокращённого умножения.

При выполнении различных алгебраических преобразований встречаются часто некоторые частные случаи умножения. Получающиеся при этом произведения полезно запомнить наизусть, чтобы в дальнейшем, когда эти случаи встретятся, можно было сразу написать результат, не производя каждый раз почленного умножения. Равенства, выражающие эти частные случаи умножения, называются формулами сокращённого умножеиия.

1. Квадрат суммы. Возведём в квадрат сумму двух чисел a и b.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

Приведя подобные члены, получим:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Эту формулу следует запомнить как в приведённой записи, так и в словесном выражении.

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

Примеры:

1. $(3a+2b)^2=(3a)^2+2\cdot3a\cdot2b+(2b)^2=$
$=9a^2+12ab+4b^2.$

Следует приобрести навык писать сразу окончательный результат, не производя промежуточной записи, которая показана в этом примере.

2. Эта формула применяется при устном возведении в квадрат чисел, немного больших «круглого» числа, например:

$$41^2=(40+1)^2=40^2+2\cdot40\cdot1+1^2=1681;$$
$$32^2=(30+2)^2=30^2+2\cdot2\cdot30+2^2=900+120+4=1024.$$

3. Особенно легко запомнить приём возведения в квадрат чисел, оканчивающихся пятёркой. Положим, число имеет a десятков и 5 единиц. Тогда его можно записать так:

$$10a+5.$$

Возведём это число в квадрат по формуле:

$$(10a+5)^2=100a^2+2\cdot5\cdot10a+5^2=100a^2+100a+25=$$
$$=100a(a+1)+25.$$

Полученное выражение показывает, что для возведения в квадрат числа, оканчивающегося пятёркой, надо число его десятков умножить на число, единицей большее, и к произведению приписать 25. Например:

$$65^2=6\cdot7\cdot100+25=4225;$$
$$85^2=8\cdot9\text{ (сотен)}+25=7225;$$
$$3{,}5^2=3\cdot4+0{,}25=12{,}25.$$

Последний пример можно записать так:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2=3\cdot4+\frac{1}{4}=12\frac{1}{4}.$$

Значит, чтобы возвести в квадрат смешанное число, дробная

часть которого равна $\frac{1}{2}$, достаточно целую часть умножить на число, единицей большее, и к произведению прибавить $\frac{1}{4}$.

$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 8\cdot 9 + \frac{1}{4} = 72\frac{1}{4}; \quad \left(24\frac{1}{2}\right)^2 = 24\cdot 25 + \frac{1}{4} = 600\frac{1}{4}.$$

2. Квадрат разности.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2.$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

Эта формула отличается от ранее выведенной формулы только знаком среднего члена. Поэтому часто пишут сразу обе формулы так:

$$\boldsymbol{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.}$$

Примеры:

1. $(4a^2b - ab)^2 = 16a^4b^2 - 8a^2b\cdot ab + a^2b^2 =$
$= 16a^4b^2 - 8a^3b^2 + a^2b^2.$

И здесь следует стараться написать сразу результат, производя промежуточные вычисления в уме.

2. Эта формула применяется при устном возведении в квадрат чисел, немного меньших «круглого» числа, например:

$$39^2 = (40-1)^2 = 40^2 - 2\cdot 40 + 1 = 1521;$$
$$48^2 = (50-2)^2 = 2500 - 2\cdot 2\cdot 50 + 4 = 2304;$$
$$79^2 = (80-1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6241.$$

3. Произведение суммы двух чисел на их разность.

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2.$$

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.}$$

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.

Примеры.

1. $(5a+2b)(5a-2b) = 25a^2 - 4b^2.$
2. $(2a^2+3b^3)(2a^2-3b^3) = 4a^4 - 9b^6.$

3. Эта формула применяется при устном умножении двух чисел, из которых одно на столько единиц больше «круглого» числа, на сколько другое меньше его, например: 47 и 53, 68 и 72.

$$47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2491;$$
$$68 \cdot 72 = 70^2 - 4 = 4896;$$
$$33 \cdot 27 = 900 - 9 = 891.$$

4. Но иногда бывает полезно поступить наоборот: для вычисления разности квадратов двух чисел заменить эту разность произведением суммы оснований на их разность, например:

$$102^2 - 101^2 = (102 - 101)(102 + 101) = 203;$$
$$54^2 - 46^2 = (54 - 46)(54 + 46) = 800;$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\right)\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\right) = 50.$$

4. Куб суммы.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, плюс куб второго числа.

Примеры.

1. $(2a + 3b)^3 = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 +$
$+ 27b^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$

2. $11^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1331.$

5. Куб разности.

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b).$$

Произведя умножение и приведя подобные члены, получим:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата

первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, минус куб второго числа.

Примеры.

1. $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
2. $(3a-2b)^3 = 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$.

§ 42. Общие замечания о делении целых алгебраических выражений.

Как известно из арифметики, при делении целых чисел не всѐгда можно получить целое частное. В этом случае говорят, что делимое не делится нацело на делитель. Например, 17 не делится нацело на 5.

В таких случаях записывают частное в виде дробного числа, беря делимое числителем, а делитель — знаменателем. Например:

$$17:5=\frac{17}{5}; \qquad 3:8=\frac{3}{8}.$$

Введение дробных чисел сделало возможным деление любых чисел (кроме деления на нуль).

Так же обстоит дело и при делении целых алгебраических выражений. Частное не всегда является целым алгебраическим выражением.

Если частное от деления целых алгебраических выражений является целым алгебраическим выражением, то говорят, что деление выполнено нацело или что делимое нацело разделилось на делитель.

Поясним сказанное примерами.

Пример 1. $2ab:b$.

В этом случае деление выполняется нацело: частное равно целому выражению $2a$. Действительно, умножим частное на делитель:

$$2a\cdot b=2ab.$$

Получили делимое. Значит, выражение $2ab$ нацело разделилось на b.

Пример 2. Трёхчлен x^2-3x+2 делится на двучлен $x-1$, при этом частное равно $x-2$. Это можно проверить, умножив делитель $x-1$ на $x-2$;

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}x-1\\x-2\end{array}\\\hline +\begin{array}{r}x^2-x\quad\\-2x+2\end{array}\\\hline x^2-3x+2\end{array}$$

Мы получили делимое, значит, двучлен $x-2$ действительно является искомым частным.

Пример 3. $(2ab+c):b$.

В этом случае мы не сможем найти такое целое выражение, которое, будучи умножено на b, дало бы делимое $2ab+c$. Деление нацело здесь невозможно.

Действительно, какое бы целое выражение, содержащее буквы a, b, c, мы ни взяли, умножив его на делитель b, получим многочлен, все члены которого содержат букву b; однако второй член делимого равен c, этот член не содержит букву b.

В этом случае записывают частное в виде дробного выражения, беря делимое числителем, а делитель — знаменателем, например:

$$(2ab+c):b=\frac{2ab+c}{b}.$$

Сделаем ещё одно замечание. При всяком делении алгебраических выражений мы будем предполагать, что делитель не равен нулю, так как делить на нуль нельзя. Поэтому если делитель содержит одну или несколько букв, то для них допустимыми являются только такие значения, которые не обращают делитель в нуль. Это условие надо всегда иметь в виду при делении алгебраических выражений.

Если знаменатель данного выражения равен нулю при всех значениях входящих в него букв, то такое выражение не имеет смысла. Так, например, выражение $\frac{a}{b-b}$ не имеет смысла.

§ 43. Деление одночленов.

1. Деление степеней одного и того же основания. Пусть требуется разделить 2^5 на 2^2:

$$2^5 : 2^2 = 32 : 4 = 8 = 2^3.$$

Итак,

$$2^5 : 2^2 = 2^3.$$

Точно так же:

$$3^6 : 3^4 = 3^2.$$

Проверка. $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$.

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

Проверка. $a^2 \cdot a^3 = a^5$.

Вообще при делении степеней одного и того же числа в частном должно получиться то же число с таким показателем, который в сумме с показателем делителя даст показатель делимого. Значит, показатель в частном должен быть равен разности показателей в делимом и в делителе.

$$a^7 : a^4 = a^3.$$

Вообще

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Здесь m и n — натуральные числа, причем $m > n$.

Действительно, умножим частное a^{m-n} на делитель a^n:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m.$$

Мы получили делимое, значит, деление выполнено правильно.

Мы пришли к правилу, которое кратко можно сформулировать так:

При делении степеней одного и того же числа из показателя делимого надо вычесть показатель делителя.

Примечание. Если m равно n, то в этом случае делитель и делимое равны и, значит, частное равно единице:

$$a^m : a^m = 1.$$

2. Деление одночленов. Пусть требуется выполнить деление:

$$10a^5b^3c : 4a^3b.$$

Воспользуемся свойствами деления, приведёнными в § 21.

Разделим делимое на 4. Для этого достаточно разделить на 4 коэффициент 10. Получим:

$$2{,}5a^5b^3c.$$

Разделим результат на a^3. Для этого достаточно a^5 разделить на a^3. Получим:

$$2{,}5a^2b^3c.$$

Разделим результат на b. Для этого достаточно разделить b^3 на b. Получим окончательно:

$$10a^5b^3c : 4a^3b = 2{,}5a^2b^2c.$$

Умножив $4a^3b$ на $2{,}5a^2b^2c$, получим делимое.

Значит, деление произведено верно.

Конечно, нет необходимости записывать отдельно все промежуточные результаты. Все деления производятся последовательно и сразу записывается результат.

Пример 1. $18x^6y^2z^3 : 6x^2y^2z = 3x^4z^2$.

Делим 18 на 6; в частном записываем 3.

Делим x^6 на x^2; в частном записываем x^4.

Делим y^2 на y^2; в частном получается единица, которую не пишем.

Делим z^3 на z; в частном записываем z^2.

В итоге получили частное $3x^4z^2$.

(Проверить подстановкой: $x=1$, $y=2$, $z=2$.)

Пример 2. Решить уравнение:

$$6ax^3 : 3ax^2 = 4.$$

Произведя деление, получим:

$$2x = 4; \quad x = 2.$$

Проверить ответ подстановкой в данное уравнение.

Итак, можем вывести такое правило:

Правило. ***Чтобы разделить одночлен на одночлен, достаточно:***

1) ***разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя;***

2) ***к полученному частному приписать множителями каждую букву делимого с показателем, равным разности показателей этой буквы в делимом и делителе.***

Применяя это правило, надо иметь в виду, что:

1. Если какая-либо буква входит только в делимое, то она входит в частное с тем же показателем.

2. Если показатели какой-либо буквы в делимом и в делителе одинаковы, то эта буква не войдёт в частное.

Деление одночленов нацело невыполнимо:

1. Если показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом.

2. Если делитель содержит букву, которой нет в делимом.

§ 44. Деление многочлена на одночлен.

Воспользуемся правилом деления суммы (§ 21).

Применим это правило к делению многочлена на одночлен.

Пусть надо выполнить деление:

$$(6a^4b^2 - 7a^3b + 3{,}6a^2b^3) : 2a^2b.$$

Разделив на $2a^2b$ каждый член многочлена, получим:

$$3a^2b - 3{,}5a + 1{,}8b^2.$$

Проверим умножением частного на делитель:

$$(3a^2b - 3{,}5a + 1{,}8b^2) \cdot 2a^2b = 6a^4b^2 - 7a^3b + 3{,}6a^2b^3.$$

Получили делимое. Значит, деление произведено верно.

Отсюда получаем такое правило:

Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.

Из этого правила следует, что многочлен делится нацело на одночлен лишь в том случае, если каждый член многочлена делится на этот одночлен.

Другими словами, необходимо, чтобы делитель был общим множителем всех членов многочлена.

Поэтому если, например, делитель содержит букву, не входящую хотя бы в один из членов многочлена, то

мы сразу можем сказать, что деление нацело невыполнимо.

Точно так же деление невыполнимо, если показатель какой-либо буквы в делителе больше, чем показатель этой же буквы хотя бы в одном из членов делимого многочлена.

§ 45. Примеры решения уравнений.

Задача. *Каждую сторону квадратной площадки увеличили на 2 метра, при этом её площадь увеличилась на 12 квадратных метров. Чему была равна сторона площадки?*

Решим эту задачу составлением уравнения.

Пусть x — длина (в метрах) стороны площадки; тогда площадь этой площадки будет равна x^2.

После того как сторону увеличили на 2 метра, получилась квадратная площадка со стороной $(x+2)$ метров, а площадь стала равной $(x+2)^2$ квадратным метрам. Значит, площадь увеличилась на $(x+2)^2 - x^2$ квадратных метров; но по условию увеличение площади равно 12 *кв. м*, значит,

$$(x+2)^2 - x^2 = 12.$$

Мы получили уравнение. Чтобы его решить, сначала упростим левую часть. Применим формулу квадрата суммы:

$$(x+2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4.$$

Значит, уравнение можно записать так:

$$4x + 4 = 12.$$

Находим $4x$ (как неизвестное слагаемое):

$$4x = 8 \text{ и, наконец, } x = 2.$$

При решении получившегося уравнения мы сперва упростили его левую часть.

Во многих случаях, преобразовав сначала выражения, содержащиеся в уравнении, можно упростить это уравнение и привести его к такому виду, который мы уже умеем решать.

Пример.

$$(x-3)(x+4) - (x+2)(x-3) = 2. \qquad (1)$$

Перемножим двучлены, заключённые в скобки:

$$(x-3)(x+4)=x^2+x-12;$$
$$(x+2)(x-3)=x^2-x-6.$$

Вычтем из первого произведения второе и перепишем левую часть уравнения в следующем виде: $2x-6$.

Значит, данное уравнение (1) запишется так:

$$2x-6=2.$$

Это уравнение мы сможем решить. Найдём сначала $2x$ (как неизвестное уменьшаемое):

$$2x=8.$$

и, наконец,

$$x=4.$$

Для проверки подставим в исходное уравнение (1) $x=4$:

$$(4-3)\cdot(4+4)-(4+2)\cdot(4-3)=2,$$
$$2=2.$$

Значит, уравнение решено верно.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ.

§ 46. Общие сведения.

Из предыдущего мы знаем, что равенства, содержащие буквы, могут быть двух родов: тождества и уравнения.

Тождество (см. § 29) — это такое равенство, которое верно при любых (допустимых) значениях входящих в него букв. Так, например, формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2,\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

и т. д. — это тождества. В § 41 мы установили, пользуясь основными законами арифметических действий, что всегда, какими бы ни были числа a и b, левая часть для каждого из этих равенств равна правой.

Равенство $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$ также есть тождество, так как при всяком допустимом значении a (а именно при $a \neq 1$) левая его часть равна правой.

В § 24 и 45 мы встречались с другого рода равенствами, содержащими буквы, а именно с уравнениями. Рассмотренные нами в этих параграфах равенства содержали обозначенные буквами неизвестные числа, и нам требовалось решить уравнение, то есть выяснить, существуют ли такие значения неизвестного, при которых равенство будет верным, и найти эти значения неизвестного.

Пусть, например, даны два алгебраических выражения:

$$4x-5 \text{ и } 2x+9.$$

Числовое значение каждого из этих выражений зависит от значения буквы x, как это видно из следующей таблицы, где в первой строке даны различные значения x, а во второй и третьей — соответствующие значения данных алгебраических выражений.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x-5$	-13	-9	-5	-1	3	7	11
$2x+9$	5	7	9	11	13	15	17

Поставим такой вопрос: найдутся ли такие значения x, при которых оба данных выражения будут иметь одно и то же значение?

Другими словами, при каких значениях x будет справедливо равенство:

$$4x-5=2x+9. \qquad (1)$$

Если продолжить эту таблицу, то окажется, что при $x=7$ данные выражеиия имеют одно и то же зиачение 23. Однако из наших рассуждений не видно, существуют ли еще какие-нибудь значения x, при которых левая часть равенства (1) равна правой. Чтобы получить полный ответ, надо изучить свойства уравнений.

В иастоящей главе мы изучим основные свойства уравнений и укажем способы их решения в простейших случаях.

Заметим, что уравнение, кроме букв, обозначающих неизвестные числа, может содержать и другие буквы, которые будут означать некоторые известные, определённые числа.

Приведём ещё примеры уравнений с одним неизвестным.

1) $5x=2$; 2) $\frac{6a}{x-11}=1$; 3) $\frac{5}{x-3}=\frac{2}{x-1}$;

4) $\frac{x^2-1}{x+2}=3$; 5) $3x^4-5x^2+9=0$; 6) $x^5=a$.

Во всех этих уравнениях x является неизвестным числом, а там, где имеются другие буквы (во втором и шестом уравнениях), мы считаем их известными.

Выражения, стоящие слева и справа от знака равенства, называются левой и правой частями уравнения.

1. Корни уравнения. Пусть дано уравнение:

$$3x - 7 = 29 - 6x.$$

Подставив в него вместо x число 4, получим:

$$3 \cdot 4 - 7 = 5 \text{ и } 29 - 6 \cdot 4 = 5.$$

Обе части уравнения оказались равными одному и тому же числу. Получили верное равенство. Наоборот, если подставим вместо x любое другое число, например 5, то будем иметь:

$$3 \cdot 5 - 7 = 8; \; 29 - 6 \cdot 5 = -1.$$

Левая часть оказалась равной 8, а правая -1.

Мы не получили равенства. Задача решения уравнения и состоит в том, чтобы определить, имеются ли такие значения неизвестного, при которых обе части уравнения равны одному и тому же числу (см. § 24), и найти эти значения.

Итак,

Решить уравнение с одним неизвестным — значит найти все те значения неизвестного, при которых уравнение обращается в верное равенство.

Все такие значения неизвестного называются его корнями или решениями.

Так, в предыдущем примере $x = 4$ является корнем, или решением, уравнения

$$3x - 7 = 29 - 6x.$$

Наоборот, например, значение $x = 5$ не является корнем этого уравнения.

2. Число корней уравнения. Уравнение может иметь единственный корень.

Например, уравнение

$$x + 3 = 7$$

имеет единственный корень: $x = 4$.

Действительно, подставив в уравнение 4 вместо x, получим

$$4+3=7$$

верное равенство. Подставив же в уравнение вместо x любое число, меньшее 4, получим в сумме с 3 число, меньшее 7, а подставив число, большее 4, получим в сумме с 3 число, большее 7. Значит, число 4 является единственным, которое в сумме с 3 даёт 7, то есть обращает данное уравнение в верное равенство.

Уравнеиие может иметь **несколько корней.**

Так, уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-5)=0$$

имеет три корня: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=5$.

Действительно, при $x=1$ обратится в нуль первый множитель в левой части, при $x=2$ — второй множитель, при $x=5$ — третий. А если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и всё произведение равно нулю.

Если же мы подставим в уравнение вместо x любое другое число, то ни один из сомножителей в левой части не обратится в нуль. Следовательно, не будет равно нулю и их произведение.

Уравнение может совсем **не иметь корней.**

Возьмём, например, уравнение:

$$x+5=x+1.$$

Какое бы значение мы ни давали букве x, левая часть этого уравнения всегда будет на 4 больше правой. Значит, нет таких значений x, которые обращали бы это уравнение в верное равенство. Уравнение не имеет корней.

Уравнение может иметь **бесконечное множество корней.**

Пусть дано уравнение:

$$5(x-3)+2=3(x-4)+2x-1.$$

Подставляя вместо x любое число, убедимся, что левая и правая части уравнения будут равны. Значит, любое число является корнем этого уравнения. Покажем это.

Раскрыв скобки, получим:

$$5x-15+2=3x-12+2x-1,$$

или

$$5x-13=5x-13.$$

В обеих частях оказалось одно и то же выражение. Итак, данное уравнение оказалось равенством, справедливым при любых значениях буквы x.

Говорят, что данное уравнение удовлетворяется тождественно.

§ 47. Равносильные уравнения.

Решим уравнения:

$$1)\ 2x-5=11 \text{ и } 2)\ 7x+6=62.$$

Получим:

$$1)\ 2x=16 \text{ и } 2)\ 7x=56,$$

$$1)\ x=8 \text{ и } 2)\ x=8.$$

Оба эти уравнения имеют один и тот же единственный корень.

Определение. **Два уравнения называются равносильными, если каждое из них имеет те же корни, что и другое.**

Значит, приведённые выше два уравнения являются равносильными.

Наоборот, такие, например, уравнения:

$$(x-2)(x-5)=0 \text{ и } x-2=0,$$

неравносильны, так как первое имеет корни 2 и 5, а второе только корень 2; значит, корни у них не одни и те же.

Возьмём такие два уравнения:

$$x+2=2(x+1)-x \text{ и } 3x=3(x-1)+3.$$

Оба уравнения удовлетворяются любыми значениями x. Чтобы убедиться в этом, раскроем скобки в обоих уравнениях:

$$x+2=2x+2-x \text{ и } 3x=3x-3+3,$$

или

$$x+2=x+2 \text{ и } 3x=3x.$$

В обеих частях каждого уравнения стоит одно и то же выражение, поэтому понятно, что при любых значениях x правые и левые части каждого из этих уравнений равны одному и тому же числу.

Согласно нашему определению, эти уравнения тоже будут равносильными, так как все корни любого из них являются корнями и другого.

Наконец, если возьмём такие уравнения:

$$x+2=x+5 \text{ и } 2x+7=2x,$$

то убедимся, что оба они не имеют корней. В самом деле, какие бы значения ни давали x, в первом уравнении всегда значение правой части будет на 3 больше значения левой, и, следовательно, ни при каком значении x мы не получим верного равенства.

Точно так же при любых значениях x значение левой части второго уравнения будет всегда на 7 больше значения правой, и никогда они не смогут оказаться равными.

Итак, оба эти уравнения не имеют ни одного корня.

Уравнения, которые не имеют корней, также считаются равносильными.

Вспомним, как мы до сих пор решали уравнения.

Решим для примера уравнение

$$\frac{5}{8}x-7=13. \quad (1)$$

Рассматривая $\frac{5x}{8}$ как неизвестное уменьшаемое, можем написать:

$$\frac{5x}{8}=20. \quad (2)$$

Рассматривая $5x$ как неизвестное делимое, приходим к уравнению

$$5x=160. \quad (3)$$

Наконец, рассматривая x как неизвестный множитель, приходим к уравнению

$$x=32, \quad (4)$$

из которого заключаем, что корнем его, а значит, и всех предыдущих уравнений является число 32.

Таким образом, мы переходили от одного уравнения к другому, более простому. Найдя, что уравнение (4) имеет единственный корень 32, заключили, что этот единственный корень имеют и уравнения (3), (2) и, наконец, заданное (1). Мы, следовательно, считали, что все эти четыре уравнения равносильны.

Но действительно ли так обстоит дело? Действительно ли при всех преобразованиях, которые производились над уравнениями, мы каждый раз получали уравнение, равносильное предыдущему?

Выяснению этого вопроса посвящён следующий параграф.

§ 48. Два основных свойства уравнений.

Покажем на примерах, что уравнения обладают следующими двумя важными свойствами:

Свойство 1. ***Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен, содержащий неизвестное, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Примеры.

1. Пусть дано уравнение:

$$6x+7=31.$$

Решив его, найдём единственный корень: $x=4$.

Прибавим к обеим частям уравнения одно и то же число 15:

$$6x+22=46.$$

Решив это уравнение, найдем, что и оно имеет единственный корень: $x=4$.

Прибавив к обеим частям данного уравнения -7; $2\frac{1}{2}$; -4, получим уравнения:

$$6x=24;$$

$$6x+9\frac{1}{2}=33\frac{1}{2};$$

$$6x+3=27.$$

Решив их, опять получим для всех уравнений тот же единственный корень: $x=4$.

2. Пусть дано уравнение:

$$3x-7=8.$$

Решив его, найдём его единственный корень: $x=5$. Прибавим к обеим частям этого уравнения одночлен $-2x$, получим уравнение:

$$3x-7-2x=8-2x;$$
$$x-7=8-2x.$$

Подставив в него значение $x=5$, убедимся, что 5 является корнем и этого уравнения. На основании свойства 1 это уравнение никаких других решений иметь не может.

В самом деле, при $x=5$ обе части этого уравнения равны одному и тому же числу. Если дадим x значение, большее 5, то левая часть уравнения $x-7=8-2x$ увеличится (так как увеличится уменьшаемое), а правая уменьшится (так как увеличится вычитаемое) и, следовательно, равенство нарушится. Если же дадим x значение, меньшее 5, то, наоборот, левая часть уменьшится, а правая увеличится.

Следовательно, уравнение $x-7=8-2x$ равносильно уравнению $3x-7=8$.

3. Пусть дано уравнение:

$$2x+6=2(x+1)+4.$$

Этому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестного (в чём убедимся, раскрыв скобки).

Прибавив к обеим его частям числа 7, —4, получим уравнения:

$$2x+13=2(x+1)+11,$$
$$2x+2=2(x+1).$$

Эти уравнения тоже удовлетворяются любыми значениями x. Значит, оба эти уравнения равносильны данному уравнению.

4. Возьмём уравнение:

$$x=x+3.$$

Это уравнение не имеет решений. Прибавив к обеим частям, например, x^2-3, получим уравнение:

$$x^2+x-3=x^2+x.$$

Очевидно, что и это уравнение не имеет решения, так как при любых значениях x правая часть будет на 3 больше левой.

Значит, и в этом случае получили уравнение, равносильное данному.

Свойство 2. ***Если обе части уравнения умножить на одно и то же не равное нулю число, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Примеры.

1. Возьмём, например, уравнение:

$$3x - 5 = 13.$$

Оно имеет единственный корень: $x = 6$.

Умножим обе части его на 4:

$$12x - 20 = 52.$$

Решив это уравнение, найдём, что и оно имеет единственный корень: $x = 6$. Значит, оба уравнения равносильны.

Умножив обе части данного уравнения на -2; на 5; на $\frac{1}{3}$, получим уравнения:

$$-6x + 10 = -26;$$
$$15x - 25 = 65;$$
$$x - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}.$$

Решив их, найдём для каждого единственный корень: $x = 6$. Значит, все они равносильны данному уравнению.

2. Возьмём уравнение:

$$2x + 6 = 2(x + 1) + 4.$$

Мы уже знаем, что этому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестного. Умножив обе его части на 3; -2; $\frac{1}{2}$, получим уравнения:

$$6x + 18 = 6(x + 1) + 12;$$
$$-4x - 12 = -4(x + 1) - 8;$$
$$x + 3 = (x + 1) + 2.$$

Легко убедиться, раскрыв в правой части скобки, что каждому из этих уравнений удовлетворяет любое значение неизвестного. Значит, они равносильны данному уравнению.

3. Взяв, наконец, уравнение

$$2x + 7 = 2x + 9,$$

не имеющее решений, умножим обе части его, например, на числа -3; $\frac{1}{2}$.

Получим уравнения:

$$-6x - 21 = -6x - 27;$$
$$x + \frac{7}{2} = x + \frac{9}{2}.$$

Легко видеть, что оба эти уравнения тоже не имеют решений и, следовательно, равносильны данному уравнению.

Пользуясь этими двумя свойствами, мы можем теперь все уравнения, которые решали раньше, решать, уже не ссылаясь на зависимость между данными и результатами арифметических действий.

Решим, например, уравнение:

$$\frac{5x}{8} - 7 = 13. \qquad (1)$$

Прибавим к обеим частям уравнения по 7. На основании первого свойства полученное уравнение

$$\frac{5x}{8} = 20 \qquad (2)$$

равносильно данному.

Умножим обе части этого уравнения на 8. На основании второго свойства полученное уравнение

$$5x = 160$$

равносильно (2), а следовательно, и данному.

Разделив обе части этого уравнения на 5 (или умножив на $\frac{1}{5}$), получим уравнение

$$x = 32,$$

равносильное данному.

§ 49. Уравнения, содержащие неизвестное в обеих частях.

До этого мы решали уравнения, в которых неизвестное входило в одну часть уравнения. Но могут быть уравнения, которые содержат неизвестное в обеих частях, например:

$$3x - 17 = 18 - 2x.$$

Мы сумеем решить уравнение такого вида, если сможем преобразовать его так, чтобы члены, содержащие неизвестное, оказались только в одной части уравнения (то есть приведём уравнение к такому виду, который мы уже умеем решать).

Воспользовавшись первым свойством уравнения, мы легко решим уравнение

$$3x - 17 = 18 - 2x.$$

Прибавив к обеим частям этого уравнения по $2x$, получим уравнение, равносильное данному:

$$3x - 17 + 2x = 18 - 2x + 2x,$$

или после упрощения:

$$5x - 17 = 18.$$

Но это уравнение мы решать уже умеем, получим:

$$5x = 35, \quad x = 7.$$

Подставив $x = 7$ в данное уравнение, получим:

$$3 \cdot 7 - 17 = 4, \quad 18 - 2 \cdot 7 = 4,$$

$$4 = 4.$$

Корень найден верно.

Выведем некоторые следствия из первого свойства уравнений.

Возьмём уравнение:

$$2x - 5 + 4x = 17 + 4x.$$

В обеих частях этого уравнения есть один и тот же член $4x$. Очевидно, если мы прибавим к обеим частям по $-4x$ (или, что то же, вычтем $4x$), то вместо этих членов в обеих частях уравнения будем иметь нули и сразу получим уравнение $2x - 5 = 17$, равносильное данному.

Если в обеих частях уравнения имеются одинаковые члены, то их можно опустить.

Возьмем уравнение:

$$3x + 11 = 26 - 2x.$$

Чтобы сгруппировать в левой части члены, содержащие неизвестное, нужно к обеим частям уравнения прибавить по $2x$, а чтобы сгруппировать в правой части свободные члены, надо к обеим частям прибавить по -11.

Получим:

$$3x + 11 + 2x - 11 = 26 - 2x + 2x - 11,$$

или

$$3x + 2x = 26 - 11.$$

Сравнивая это уравнение с данным, видим, что член $-2x$ оказался в левой части, а 11 — в правой, но оба

при этом изменили знак на противоположный. Отсюда правило:

Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, переменив его знак на противоположный.

Пример.

$$7x - 11 - 2x + 4 = 3x + 18 + x - 2.$$

Перенесём все члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а все свободные члены — в правую, переменив у каждого из них знак на противоположный. Получим:

$$7x - 2x - 3x - x = 18 - 2 + 11 - 4,$$

или

$$x = 23.$$

§ 50. Уравнение первой степени с одним неизвестным.

Уравнением первой степени с одним неизвестным называется уравнение вида

$$ax + b = 0, \qquad (1)$$

где x — неизвестное число, a (коэффициент при неизвестном) — любое данное число, не равное нулю, b (свободный член) — любое данное число.

Уравнение (1) называется уравнением первой степени, потому что его левая часть есть многочлен первой степени относительно неизвестного x.

Примеры уравнений первой степени с одним неизвестным:

$$3x - 17 = 0; \quad 0,5x + 8 = 0; \quad \frac{5x}{7} - \frac{3}{4} = 0 \text{ и т. д.}$$

Многие уравнения после некоторых преобразований приводятся к уравнению первой степени с одним неизвестным.

Приведём пример:

$$\frac{3(x-1)}{2} + \frac{x-4}{3} = 12 - \frac{(x+1)}{2}.$$

Умножив обе части уравнения на 6, по сокращении получим:

$$9(x - 1) + 2(x - 4) = 72 - 3(x + 1).$$

Раскроем скобки:

$$9x-9+2x-8=72-3x-3.$$

Перенесём все члены из правой части в левую (с противоположными знаками) и приведём подобные члены. Получим:

$$14x-86=0.$$

На основании первого и второго свойства уравнений полученное уравнение $14x-86=0$ равносильно данному. Оба они имеют корень $x=\frac{43}{7}$.

В общем случае *уравнение первой степени с одним неизвестным имеет единственный корень.*

В самом деле, перенеся в уравнении

$$ax+b=0$$

b в правую часть, получим уравнение, равносильное данному:

$$ax=-b.$$

Разделив теперь обе части уравнения на не равное нулю число a, получим единственное значение для x, а именно:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

§ 51. Общие указания к решению уравнений.

Во многих случаях решение уравнения сводится к тому, что мы данное уравнение заменяем другим, ему равносильным, но более простым, это другое заменяем третьим и так продолжаем до тех пор, пока не получим самое простое уравнение вида $x=a$, которое прямо указывает, что неизвестное должно быть равно числу a. Следовательно, $x=a$ должно быть корнем и всех предыдущих равносильных ему уравнений, в том числе и данного.

Возьмём несколько уравнений и проследим, какие преобразования приходится над ними производить, чтобы прийти к простейшему уравнению.

Решим уравнение:

$$\frac{x-4}{3}+\frac{2(x+1)}{4}-1=\frac{5(x-3)}{2}+2x-\frac{11x+43}{6}.$$

1) Сделаем коэффициенты всех членов целыми числами. Для этого умножим каждый член уравнения на 12. Произведя сокращения, получим:

$$4(x-4)+6(x+1)-12=30(x-3)+$$
$$+24x-2(11x+43).$$

2) Чтобы отделить члены, содержащие неизвестное, и свободные члены, раскроем скобки:

$$4x-16+6x+6-12=30x-90+24x-22x-86.$$

3) Сгруппируем теперь в одной части члены, содержащие неизвестное, в другой — свободные члены.

4) Упростим уравнение, приведя подобные члены:

$$154=22x.$$

5) Разделим обе его части на 22. Получим:

$$x=7.$$

Корнем этого уравнения, а следовательно, и всех предыдущих является 7.

Предлагаем учащимся проверить корень, подставив в каждое из полученных уравнений $x=7$, и убедиться, что 7 является корнем всех этих уравнений.

Из рассмотренного примера видно, что к решению уравнения первой степени можно дать такие указания:

1. Привести уравнение к уравнению с целыми коэффициентами.

2. Раскрыть скобки.

3. Сгруппировать члены, содержащие неизвестное, в одной части уравнения, а свободные члены — в другой.

4. Привести подобные члены.

5. Если коэффициент при неизвестном не нуль, то разделить на него обе части уравнения.

Но эти указания ни в коей мере не будут являться обязательными для всякого уравнения.

Во-первых, при решении многих более простых уравнений приходится начинать не с первого, а со второго, третьего и даже сразу с пятого этапа.

Во-вторых, при решении некоторые промежуточные этапы могут оказаться ненужными.

Пример.

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}.$$

Умножив обе части уравнения на 12, получим уравнение с целыми коэффициентами:

$$4x-6=3x+4$$

и сразу переходим к третьему этапу:

$$4x-3x=4+6.$$

Откуда $x=10$.

Раскрывать скобки здесь не пришлось.

В-третьих (и это главное), иногда бывает выгоднее нарушить указанный порядок, если уравнение решается проще и короче.

Примеры.

1. $7(x-3)=56$.

Здесь следует, не раскрывая скобок, сначала разделить обе части на 7:

$$x-3=8; \quad x=11.$$

Уравнение решается в два действия.

Решение по схеме потребовало бы четырёх действий (два умножения, сложение и деление).

2. $\frac{17}{2}x+3=\frac{3}{2}x+87$.

Здесь выгоднее сразу начать с третьего этапа, так как видно, что после приведения подобных членов коэффициент при x будет целым.

Ещё лучше одновременно выполнить третий и четвёртый этапы, то есть вычесть в уме $\frac{3}{2}$ из $\frac{17}{2}$ и 3 из 87, и сразу записать:

$$7x=84; \quad x=12.$$

§ 52. Решение задач с помощью уравнений.

Вспомним, в каком порядке мы до сих пор решали задачи с помощью уравнений.

1. Обозначали буквой (обычно буквой x) неизвестное число, определить которое требуется вопросом задачи.

2. С помощью этой буквы и данных в задаче чисел выражали другие неизвестные числа, о которых говорится в задаче.

3. Составляли выражение, которое было бы равно одному из чисел, данных в задаче.

4. Приравнивали полученное выражение и к этому числу. Получали уравнение.

5. Решали уравнение и получали ответ на вопрос задачи.

6. Если задача требовала найти не одно, а несколько чисел, то, узнав одно из них, находили и остальные.

Покажем все эти этапы на решении таких задач.

Задача 1. *Длина Днепра и Дона вместе равна* 4255 *км. Днепр длиннее Дона на* 315 *км. Какова длина Днепра и Дона в отдельности?*

1) В задаче требуется узнать два числа: длину Днепра и длину Дона. Обозначим через x любое из них, например длину Дона. Запишем это:

длина Дона x километров.

2) Другое неизвестное число — длина Днепра. Но в задаче сказано, что Днепр длиннее Дона на 315 *км*. Значит, чтобы выразить длину Днепра, достаточно к длине Дона прибавить 315 *км*. Запишем:

длина Днепра $(x+315)$ километров.

3) В задаче имеется еще одно данное — общая длина Днепра и Дона. Но мы можем выразить эту общую длину и другим способом, сложив уже выраженные через x длины Дона и Днепра.

Запишем: длина Дона и Днепра вместе $[x+(x+315)]$ километров.

4) Так как эта общая длина Днепра и Дона по условию задачи равна 4255 *км*, то составляем уравнение:

$$x+(x+315)=4255.$$

5) Решив уравнение, найдём: $x = 1970$.

Итак, длина Дона равна 1970 *км.*

6) В задаче требуется найти ещё длину Днепра. Но она у нас уже записана во втором пункте. Подставив 1970 вместо x, получим:

длина Днепра равна $1970 + 315 = 2285$ (*км*).

Задача 2. *Для детского сада купили* 16 *больших и малых мячей, всего на* 24,4 *руб. Большой мяч стоил* 2,5 *руб., малый* 1,2 *руб. Сколько было куплено тех и других мячей в отдельности?*

Решение проведём в таком порядке.

1) Больших мячей куплено x штук.

2) Малых мячей куплено $(16 - x)$ штук.

3) Все большие мячи стоили $2{,}5x$ рублей.

4) Все малые мячи стоили $[1{,}2(16 - x)]$ рублей.

5) Все большие и малые мячи вместе стоили $[2{,}5x + 1{,}2(16 - x)]$ рублей.

По условию

$$2{,}5x + 1{,}2(16 - x) = 24{,}4.$$

6) Решив уравнение, найдём: $x = 4$.

7) Малых мячей куплено $16 - 4 = 12$ (шт.).

При решении этой задачи для каждого сорта мячей имелись три зависящие друг от друга величины: число мячей, стоимость одного мяча и стоимость всех мячей. Эта зависимость становится более ясной, а отсюда и составление уравнения будет более лёгким, если весь ход решения записать не по отдельным пунктам, как сделано выше, а в виде таблицы.

Составим такую таблицу:

	Число мячей	Цена одного мяча	Стоимость всех мячей
1. Большие мячи....			
2. Малые мячи......			

Заполним клетки этой таблицы в таком порядке:

1) записываем в третьем столбце известные цены одного

мяча; 2) записываем буквой x во втором столбце число больших или малых мячей; тогда число других мячей запишется через $16-x$; 3) заполняем четвёртый столбец, умножая цену мяча на их число.

Вся таблица заполнена. Остаётся сложить выражения в четвёртом столбце и сумму приравнять к 24,4. Получим уравнение.

Всё решение представится в виде такой записи:

	Число мячей	Цена одного мяча	Стоимость всех мячей
1. Большие мячи . . .	x	2,5	$2,5x$
2. Малые мячи	$16-x$	1,2	$1,2(16-x)$

По условию:

$$2,5\,x+1,2\,(16-x)=24,4.$$

Предлагается решить эту задачу с помощью составления таблицы, обозначив через x число малых мячей.

Задача 3. *На первом складе было 2300 $м^3$ дров, на втором 2800 $м^3$. Со второго склада взяли впятеро больше дров, чем с первого, и тогда на обоих складах дров стало поровну. Сколько дров взяли с каждого склада?*

Так как в задаче сказано, что дров на обоих складах осталось поровну, то выразим с помощью x остаток дров на каждом складе и приравняем эти остатки.

Решение будет иметь такой вид.

1) С первого склада взяли x $м^3$.
2) Осталось на первом складе $(2300-x)$ $м^3$.
3) Со второго склада взяли $5x$ $м^3$.
4) Осталось на втором складе $(2800-5x)$ $м^3$.
5) По условию

$$2300-x=2800-5x.$$

6) Решаем уравнение:

$$4x=500;\quad x=125.$$

7) С первого склада взято 125 $м^3$.

Со второго склада взято $125\cdot5=625$ ($м^3$).

8) Проверка. $2300-125=2175$, $2800-625=2175$.

Для составления уравнения и здесь очень удобно представить ход решения в виде таблицы:

	Было	Взяли	Осталось
1-й склад	2300	x	$2300-x$
2-й склад	2800	$5x$	$2800-5x$

По условию

$$2300-x=2800-5x.$$

§ 53. Краткие исторические сведения.

(Из истории уравнений.)

Ещё в глубокой древности в математических сочинениях встречались уравнения, а также задачи, решаемые с помощью уравнеиий.

Так, в египетском папирусе около 2000 лет до нашей эры (причём, как указывает в нём автор, писец Ахмес, это математическое сочинение является копией с другого, более древнего сочинения) имелись задачи на отыскание неизвестного числа. Это неизвестное называлось «хау» (куча) и обозначалось особым иероглифом.

Вот примеры задач из этого папируса.

1) «Неизвестное, его седьмая часть, его целое составляет 19». В современном виде задача запишется так:

$$\frac{1}{7}x+x=19.$$

2) «$\frac{2}{3}$ сложено и $\frac{1}{3}$ отнята; остаток 10».

Судя по приведённому в папирусе решению, задачу следует понимать так: к неизвестному прибавлено $\frac{2}{3}$ его и отнята $\frac{1}{3}$ полученной суммы; остаток 10; найти число.

Задача в современном виде запишется так:

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10.$$

Ответ: $x=9$.

У Диофанта (III век, см. § 27) также встречаются уравнения с одним неизвестным, иапример:

«Числа 20 и 100. Нужно одно и то же число прибавить к меньшему и вычесть из большего; отношение суммы к разности равно 4».

Задача приводит к уравнению:

$$\frac{20+x}{100-x}=4.$$

В индийской рукописной арифметике VII или VIII века нашей эры, являющейся копией с более древней рукописи (III—IV века), имеется такая задача:

«Из четырёх жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий втрое больше второго, четвёртый вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132.

Сколько дал первый?»

Получаем уравнение:

$$x+2x+6x+24x=132.$$

В рукописи задача решается способом «ложного положения». (Этим способом пользовался и Л. Ф. Магницкий в своей «Арифметике».)

«Если бы первый дал 1, то второй дал бы 2, третий 6, четвёртый 24, а все вместе 33. Но всего было 132, то есть вчетверо больше. Значит, и каждый из жертвователей дал вчетверо больше».

Ответ: 4; 8; 24; 96.

Но общее правило для решения уравнений первой степени с одним неизвестным дал в IX веке Мухаммед аль-Хорезми.

В своем сочинении «Аль-джебр и аль-мукабала» он даёт два приёма, применяемых при решении уравнений.

Приём «аль-джебр» заключается в том, что если имеются в уравнении отрицательные (вычитаемые) члены, то следует прибавить противоположные им члены к обеим частям уравнения, и тогда все члены будут положительными.

Приём «аль-мукабала» заключается в вычитании из обеих частей уравнения одинаковых членов, что приводит к его упрощению.

Пусть, например, дано уравнение:

$$5x-17=2x-5.$$

Применяем «аль-джебр»: прибавляем к каждой части уравнения 5 и 17.

Получим:

$$5x+5=2x+17.$$

Применяем «аль-мукабала»: вычитаем из каждой части $2x$ и 5. Получим:

$$3x=12.$$

Отсюда легко находится x.

Появление этого замечательного сочинения аль-Хорезми можно считать началом выделения алгебры как самостоятельной, отдельной отрасли математики.

Самое название «алгебра» взято из заглавия этого сочинения («Аль-джебр»).

ГЛАВА ПЯТАЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ.

§ 54. Понятие о разложении на множители.

Пусть требуется найти числовую величину выражения

$$ab+ac-ad$$

при

$$a=37,\quad b=26,\quad c=17 \text{ и } d=23.$$

Подставив заданные значения букв, найдём:

$$37\cdot 26+37\cdot 17-37\cdot 23=962+629-851=740.$$

Но можно найти числовую величину этого выражения гораздо быстрее и легче, если преобразовать его.

На основании распределительного закона можем записать:

$$ab+ac-ad=a(b+c-d).$$

Найдём числовую величину полученного выражения, тождественного данному:

$$37\cdot(26+17-23)=37\cdot 20=740.$$

Все вычисления легко производятся в уме.

Итак, в этом случае оказалось выгодным данное выражение (алгебраическую сумму) представить в виде произведения двух сомножителей — одночлена и многочлена.

Разложить многочлен на множители — значит тождественно преобразовать его в произведение двух или нескольких сомножителей — многочленов.

В частности, некоторые из сомножителей могут оказаться одночленами.

Разложение на множители алгебраических выражений во многом сходно с разложением целых чисел на простые множители в арифметике. Там мы прибегали к разложению на множители, когда нужно было сократить дробь или привести несколько дробей к общему знаменателю (при сложении и вычитании дробей).

Такое же применение имеет в алгебре разложение на множители алгебраических выражений. В следующей главе рассматриваются алгебраические дроби и действия с ними. Сокращение дробей, нахождение наиболее простого общего знаменателя при сложении и вычитании дробей значительно облегчают тождественные преобразования и вычисления. А для этого требуется предварительно представить (когда это возможно) числитель и знаменатель в виде произведения, то есть разложить их на множители.

Но в алгебре разложение на множители применяется не только при действиях с дробями.

Выше уже приведён пример того, как разложение на множители облегчило нахождение числовой величины алгебраического выражения.

Разложение на множители применяется также при решении некоторых уравнений и в других разделах алгебры.

Приведём наиболее употребительные и наиболее простые приёмы разложения многочленов на множители.

§ 55. Вынесение за скобки общего множителя.

Пример 1. Пусть дан многочлен:

$$6a^2 - 8ab + 4a.$$

Легко видеть, что все его члены имеют общим множителем $2a$, так что можно это выражение записать в таком виде:

$$2a \cdot 3a - 2a \cdot 4b + 2a \cdot 2.$$

Применив распределительный закон, получим:

$$6a^2 - 8ab + 4a = 2a \cdot (3a - 4b + 2).$$

Таким образом, данный многочлен мы представили в виде произведения одночлена и многочлена.

Из этого примера видно, что для разложения многочлена на множители путём вынесения за скобки общего множителя следует:

1) определить этот общий множитель,

2) разделить на него данный многочлен,

3) записать произведение общего множителя и полученного частного (заключив это частное в скобки).

Покажем на примере, как это обычно делается.

Пример 2. Разложить на множители многочлен:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3.$$

1) Заметим, что число 6 является общим делителем коэффициентов всех членов данного многочлена.

2) Берём первую букву первого члена x и смотрим, в какой степени она входит во все члены. Наименьший показатель x равен двум (в третьем члене). Отсюда следует, что все члены многочлена делятся на x^2, то есть x^2 является их общим делителем.

3) Находим, что вторая буква первого члена y должна быть взята в первой степени. (Букву z не рассматриваем, так как уже в первом члене она отсутствует.)

Таким образом, общим делителем всех членов многочлена является одночлен $6x^2y$.

Остаётся найти частное от деления данного многочлена на этот одночлен.

Получим:

$$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3 = 6x^2y(2x^2y - 3xy + 4z^3).$$

Это и есть окончательный результат.

Пример 3. Разложить на множители многочлен:

$$10a^3b - 8a^2b^3 + 2a.$$

Здесь сразу видно, что общим множителем может быть лишь $2a$, так как на 2 и на a делятся все члены; с другой стороны, последний член $2a$ никакого другого множителя не имеет. Поступив, как в предыдущем примере, получим:

$$10a^3b - 8a^2b^3 + 2a = 2a(5a^2b - 4ab^3 + 1).$$

Иногда алгебраическое выражение представляет собой алгебраическую сумму двух или нескольких слагае-

мых, причём все они имеют один и тот же многочленный множитель. Тогда он выносится за скобки так же, как и отдельная буква.

Пример 4. Разложить на множители:

$$5x^3(a-b)-4x^2y(a-b)-7xy^2(a-b).$$

Общий множитель будет $x(a-b)$.
Получим:

$$5x^3(a-b)-4x^2y(a-b)+7xy^2(a-b)=$$
$$=x(a-b)(5x^2-4xy+7y^2).$$

§ 56. Способ группировки.

Пример 1. Разложить на множители выражение:

$$c(a-b)+d(a-b). \qquad (1)$$

Вынося общий множитель $a-b$, получим:

$$(a-b)(c+d) \qquad (2)$$

Между тем если бы выражение (1) было дано в виде

$$ac-bc+ad-bd, \qquad (3)$$

то, пытаясь применить изложенный в § 55 способ разложения, мы оказались бы в затруднении, так как все члены общего множителя не имеют. Только разбив члены на две группы

$$(ac-bc)+(ad-bd)$$

и вынеся в первой группе общий множитель c, а во второй общий множитель d

$$c(a-b)+d(a-b),$$

получим выражение (1), в котором ясно виден общий множитель $a-b$.

Заметим, что в выражении (3) мы могли бы сгруппировать члены и так:

$$(ac+ad)-(bc+bd).$$

По вынесении общих множителей в каждой группе получим:

$$a(c+d)-b(c+d).$$

Здесь общим множителем является $c+d$. Вынося его, получим:

$$(c+d)(a-b).$$

Это выражение отличается от (2) только порядком множителей.

Такой способ разложения на множители называется способом г р у п п и р о в к и. Приведём ещё примеры разложения на множители этим способом.

П р и м е р 2. $2ac+3b-bc-6a$.

Общего множителя все члены данного многочлена не имеют. Следовательно, первый способ не применим. Попробуем применить способ группировки. Если сгруппируем члены по два в том порядке, как они написаны, то получим:

$$(2ac+3b)-(bc+6a).$$

Оказалось, что в обеих группах нет общих множителей, а потому и общего двучленного множителя мы не получим. Проба оказалась неудачной. Попробуем сгруппировать члены по-другому, именно: первый с третьим и второй с четвёртым:

$$(2ac-bc)+(3b-6a).$$

По вынесении за скобки общих множителей получим:

$$c(2a-b)+3(b-2a).$$

Как видим, двучлены $2a-b$ и $b-2a$ отличаются только знаками. Чтобы сделать их одинаковыми, достаточно переменить знаки у каждого члена во второй скобке, а чтобы результат не изменился, надо переменить одновременно знак перед скобкой. Получим:

$$c(2a-b)-3(2a-b).$$

Теперь легко находим, что данное выражение равно $(2a-b)(c-3)$.

Если сгруппировать первый член с четвёртым, а второй с третьим, то получим:

$$(2ac-6a)+(3b-bc)=2a(c-3)+b(3-c)=$$
$$=2a(c-3)-b(c-3)=(c-3)(2a-b),$$

то есть то же, что и раньше.

При некотором навыке можно избежать перемены знака во второй скобке, ставя сразу перед скобкой знак минус. Именно, заметив, что в первой группе первым членом в скобке будет c, члены второй группы располагают так, чтобы первым членом был так же член, содержащий c. Тогда порядок преобразований был бы такой:

$$(2ac - 6a) - (bc - 3b) = 2a(c - 3) - b(c - 3) = \\ = (c - 3)(2a - b).$$

Пример 3. Разложить на множители:

$$ab - a - b + 1.$$

Учитывая сделанное выше замечание, сразу запишем:

$$(ab - a) - (b - 1) = a(b - 1) - (b - 1) = (b - 1)(a - 1).$$

§ 57. Применение формул сокращённого умножения.

Иногда многочлен удаётся разложить на множители, применив одну из формул сокращённого умножения (§ 41). Запишем третью из формул § 41 в обратном порядке:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

В левой части этого равенства двучлен, в правой же он представлен в виде произведения, то есть разложен на множители.

Значит, *разность квадратов двух чисел можно представить в виде произведения суммы этих чисел на их разность.*

Пример. $16a^4b^2 - 9x^6 = (4a^2b + 3x^3)(4a^2b - 3x^3)$.

Возьмём теперь формулу:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Значит, *если данный трёхчлен представляет собой сумму двух квадратов, сложенную с удвоенным произведением их оснований, то его можно представить в виде квадрата суммы* (то есть в виде произведения двух одинаковых множителей).

Примеры.

1. $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.
2. $4a^2b^2 + 20abc^2 + 25c^4 = (2ab + 5c^2)^2$.

Точно так же применяется формула:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Примеры.

1. $16m^2 - 8m + 1 = (4m - 1)^2$.
2. Вычислить выражение

$$a^2 - 14a + 49 \text{ при } a = 47.$$

Вычисление выполняется в уме, если выражение разложить на множители:

$$a^2 - 14a + 49 = (a - 7)^2.$$

Подставив в правую часть $a = 47$, сразу получаем:

$$(47 - 7)^2 = 40^2 = 1600.$$

Так же применяются формулы:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Пример.

Вычислить выражение

$$a = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \text{ при } x = 17.$$

Разложив данный многочлен на множители, получим:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3.$$

Подставив $x = 17$, найдём: $a = 20^3 = 8000$.

Кроме перечисленных выше формул сокращённого умножения, применяются ещё формулы, позволяющие разложить на множители сумму или разность кубов двух чисел.

Рассмотрим трёхчлен $a^2 - ab + b^2$, который называется **неполным квадратом разности** чисел a и b. Умножим его на $a + b$:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ a + b \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} a^3 - a^2b + ab^2 \qquad \\ + a^2b - ab^2 + b^3 \end{array} \\ \hline a^3 \qquad\qquad\qquad + b^3 \end{array}$$

Отсюда имеем:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3. \qquad (1)$$

Произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.

Эту формулу можно читать справа налево так:

Сумма кубов двух чисел равна сумме этих чисел, умноженной на неполный квадрат их разности:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (2)$$

Это и есть формула разложения на множители суммы кубов двух чисел.

Умножим трехчлен a^2+ab+b^2, который называется неполным квадратом суммы чисел a и b, на $a-b$:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} a^2+ab+b^2 \\ a-b \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} a^3+a^2b+ab^2 \qquad \\ -a^2b-ab^2-b^3 \end{array} \\ \hline a^3 \qquad\qquad\quad -b^3 \end{array}$$

Отсюда имеем:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \qquad (3)$$

Эту формулу можно читать и справа налево:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) читаются так:

Произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.

Разность кубов двух чисел равна разности этих чисел, умноженной на неполный квадрат их суммы.

Примеры.

1. $27a^3b^3+8c^3=(3ab+2c)(9a^2b^2-6abc+4c^2)$.
2. $64a^6b^3-1=(4a^2b-1)(16a^4b^2+4a^2b+1)$.

§ 58. Применение нескольких способов.

При разложении на множители заданного выражения прежде всего следует посмотреть, не имеют ли все его слагаемые общего множителя. Вынесение за скобки всех

общих множителей является операцией, которую надо выполнить в первую очередь.

После этого следует рассмотреть многочлен, заключённый в скобках. Может случиться, что он в свою очередь допускает разложение каким-либо из способов, рассмотренных в § 56 и 57.

В таком случае это разложение и нужно выполнить.

Задача. *Доказать, что разность между кубом любого целого числа и самим числом всегда делится на 6.*

Обозначим произвольное целое число через n.

Надо доказать, что значение выражения $n^3 - n$ при любом целом значении n делится на 6.

Разложим полученное выражение на множители. Прежде всего вынесем за скобку общий множитель n. Получим:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1).$$

Видим, что выражение в скобках является разностью квадратов. Применив формулу, получим:

$$n^3 - n = n(n-1)\ (n+1).$$

Расположим числа в порядке возрастания:

$$n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1).$$

Это равенство показывает, что выражение $n^3 - n$ представляет собой произведение трёх последовательных целых чисел. Но из трёх последовательных чисел одно непременно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Значит, $n^3 - n$ делится на 2 и на 3. Из арифметики мы знаем, что в таком случае оно делится и на 6.

§ 59. Деление многочленов при помощи разложения на множители.

В арифметике выполнение действия деления можно упростить, если делимое и делитель разложены на множители. Пусть, например, требуется разделить число 2772 на 28. Разложив (способами, известными из арифметики) число 2772 на множители, получим:

$$2772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Зная, что $28 = 2^2 \cdot 7$, мы можем выделить в делимом сомножитель, равный делителю:

$$2772 = (2^2 \cdot 7) \cdot (3^2 \cdot 11).$$

Отсюда без труда находится искомое частное (как произведение оставшихся множителей):

$$\frac{2772}{28} = \frac{(2^2 \cdot 7) \cdot (3^2 \cdot 11)}{2^2 \cdot 7} = 3^2 \cdot 11 = 99.$$

Сказанное можно применить и к делению многочленов. Если, разложив на множители данные многочлены, можно в многочлене-делимом выделить сомножитель, равный делителю, то деление выполняется нацело и частное равно произведению оставшихся множителей.

Приведём пример. Выполнить деление:

$$\frac{x^5 - a^4x}{x^2 + ax}.$$

Разложим делимое на множители:

$$x^5 - a^4x = x(x^4 - a^4) = x(x^2 - a^2)\ (x^2 + a^2) =$$
$$= x(x - a)\ (x + a)\ (x^2 + a^2).$$

Разложим на множители делитель:

$$x^2 + ax = x(x + a).$$

Мы видим, что первый и третий множители делимого дают (в произведении) делитель.

Значит, частное есть целое выражение:

$$\frac{x^5 - a^4x}{x^2 + ax} = \frac{[x(x + a)]\ (x - a)\ (x^2 + a^2)}{x(x + a)} = (x - a)(x^2 + a^2) =$$
$$= x^3 - ax^2 + a^2x - a^3.$$

Из формул сокращённого умножения вытекают следующие формулы деления, которые полезно запомнить:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

Разность квадратов двух чисел, делённая на разность оснований, равна сумме этих чисел.

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$$

Разность квадратов двух чисел, делённая на сумму оснований, равна разности этих чисел.

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

Разность кубов двух чисел, делённая на разность оснований, равна неполному квадрату суммы этих чисел.

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

Сумма кубов двух чисел, делённая на сумму оснований, равна неполному квадрату разности этих чисел.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

§ 60. Понятие об алгебраической дроби.

1. Определение алгебраической дроби. В § 42 было сказано, что если деление многочленов нельзя выполнить нацело, то частное записывается в виде дробного выражения, в котором делимое является числителем, а делитель — знаменателем.

Примеры дробных выражений:

$$\frac{a}{2b}; \quad \frac{a^2-b}{2b-c}; \quad \frac{3(x+y)-5}{8y^5}; \quad \frac{(a+c)^3-(a-c)^2}{x^2+xy+y^2} \text{ и т. д.}$$

Числитель и знаменатель дробного выражения и сами могут быть дробными выражениями, например:

$$\frac{\frac{a+b}{c}}{5a^2}; \quad \frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}-c}.$$

Из дробных алгебраических выражений наиболее часто приходится иметь дело с такими, в которых числитель и знаменатель являются многочленами (в частности, и одночленами). Каждое такое выражение называется *алгебраической дробью*.

Определение. **Алгебраическое выражение, представляющее собой дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены, называется алгебраической дробью.**

Как и в арифметике, числитель и знаменатель алгебраической дроби называются *членами* дроби.

В дальнейшем, изучив действия над алгебраическими дробями, мы сможем всякое дробное выражение при помощи тождественных преобразований преобразовать в алгебраическую дробь.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{2x-5}{x^2+x+1}; \quad \frac{a^5-ab^3+3b^4}{a^3-3a^2b^2-4b^3}; \quad \frac{12}{x^2+1}; \quad \frac{2}{a}.$$

Заметим, что целое выражение, то есть многочлен, можно записать в виде дроби, для этого достаточно записать в числителе данное выражение, а в знаменателе 1. Например:

$$x^2-y=\frac{x^2-y}{1}.$$

2. **Допустимые значения букв.** Буквы, входящие только в числитель, могут принимать любые значения (если не введены какие-либо дополнительные ограничения условием задачи).

Для букв же, входящих в знаменатель, допустимыми являются только те значения, которые не обращают в нуль знаменатель. Поэтому в дальнейшем всегда будем считать, что *знаменатель алгебраической дроби не равен нулю*.

3. **Значение дроби.** Надо различать алгебраическую дробь от ее значения. Значение алгебраической дроби может быть как целым, так и дробным числом, положительным, отрицательным, нулём. Например, значение дроби $\frac{a}{b}$

при $a=6$, $b=3$ равно 2;
при $a=-5$, $b=2$ равно $-\frac{5}{2}$;
при $a=0$, $b=5$ равно 0.

§ 61. Основное свойство дроби и сокращение дробей.

Дробь, у которой числитель и знаменатель являются любыми рациональными числами (при условии, что знаменатель не равен нулю), обладает следующим основным свойством:

Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить на одно и то же не равное нулю число:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

где m может быть любым числом — целым и дробным, положительным и отрицательным, но не равным нулю.

Для алгебраической дроби основное свойство формулируется так:

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же многочлен, то получится дробь, тождественно равная данной.

Поясним это следующим примером. Рассмотрим дробь

$$\frac{x+2}{x-3}. \qquad (1)$$

Умножим её числитель и знаменатель на двучлен $x-2$, тогда получим следующую дробь:

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}. \qquad (2)$$

Мы считаем допустимыми лишь те значения x, при которых знаменатель данной дроби (1), а также многочлен, на который умножают её числитель и знаменатель, не равны нулю. Но от умножения числителя и знаменателя дроби (1) на число, не равное нулю, её значение не меняется. Итак, при любых допустимых значениях x дроби (1) и (2) имеют одно и то же значение, то есть эти дроби тождественны:

$$\frac{x+2}{x-3}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}.$$

Или, выполнив умножение в числителе и знаменателе второй дроби, получим:

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

Примечание. В нашем примере допустимыми являются все значения x, кроме чисел 2 и 3: при $x=3$ обращается в нуль знаменатель данной дроби (1), а при $x=2$ обращается в нуль множитель, на который умножаются её числитель и знаменатель.

Сокращение дробей. Перепишем последнее равенство в обратном порядке, переставив между собой его правую и левую части:

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\frac{x+2}{x-3}.$$

Мы преобразовали дробь $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ в более простую дробь $\frac{x+2}{x-3}$, разделив числитель и знаменатель на общий множитель $x-2$.

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби разделить на один и тот же многочлен, то получится дробь, тождественно равная данной.

Этим свойством пользуются для упрощения дроби: если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель, то, разделив на него числитель и знаменатель, приведём дробь к более простому виду.

Такое преобразование называется сокращением дроби.

Примеры.

$$\frac{5a}{10b}=\frac{a}{2b};\quad \frac{6x^2}{2xy}=\frac{3x}{y};\quad \frac{18a^4b^3c}{12ab^4c}=\frac{3a^3}{2b};$$

$$\frac{6a(p-q)}{4n(p-q)}=\frac{3a}{2n};\quad \frac{5a^3(a^2-ab+b^2)}{6ab(a^2-ab+b^2)}=\frac{5a}{6b}.$$

Чтобы сократить алгебраическую дробь, надо предварительно разложить числитель и знаменатель на множители (если это возможно) и после этого произвести возможные сокращения.

Пример.

$$\frac{a^2-5ab}{a^2b-5ab^2}=\frac{a(a-5b)}{ab(a-5b)}=\frac{1}{b}.$$

§ 62. Перемена знака у членов дроби.

Из основного свойства дроби вытекает, что величина дроби не изменится, если её числитель и знаменатель умножить на -1, например:

$$\frac{6}{4}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2},\quad \frac{-6}{4}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}.$$

Но умножение любого числа на -1 только меняет его знак на противоположный. Итак:

Значение дроби не изменится, если изменить знаки числителя и знаменателя на противоположные:

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}.$$

К такому преобразованию дробей приходится иногда прибегать, например, при их сложении.

Пример.

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{-7}=\frac{5}{7}+\frac{-2}{7}=\frac{5+(-2)}{7}=\frac{3}{7}.$$

Посмотрим, что получится с дробью, если переменить знак только у одного из членов дроби:

$$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}, \quad \frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}, \quad \frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}.$$

Мы видим, что когда переменили знак только у числителя или только у знаменателя, то получили число, противоположное прежнему, то есть знак у дроби переменился на противоположный.

Пусть мы изменили знак у одного из членов дроби; согласно предыдущему получили число, противоположное прежнему. Значит, если у этой новой дроби переменим знак на противоположный, то получим прежнюю дробь.

Пример. Пусть дана дробь $\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$. Изменив знак у числителя, получим $\frac{5}{2}$. Изменив знак перед этой дробью, получим $-\frac{5}{2}$, то есть прежнее значение дроби.

Отсюда заключаем:

Значение дроби не изменится, если переменить знак у одного из членов дроби и перед самой дробью:

$$\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}.$$

Это правило применяется и при действиях с дробями. Так, решение предыдущего примера можно было выполнить и таким образом:

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{-7}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}.$$

Переменив знак у знаменателя второй дроби, мы переменили знак и перед самой дробью.

Приведём ещё пример:

$$\frac{8}{13}-\frac{4}{-13}=\frac{8}{13}-\frac{-4}{13}=\frac{8-(-4)}{13}=\frac{12}{13},$$

или

$$\frac{8}{13}-\frac{4}{-13}=\frac{8}{13}+\frac{4}{13}=\frac{12}{13}.$$

В первом случае мы переменили знак у обоих членов второй дроби, оставив тот же знак перед дробью.

Во втором случае мы переменили знак только у знаменателя, но одновременно переменили знак и перед дробью.

В обоих случаях получили один и тот же результат, как и должно быть.

§ 63. Целая отрицательная и нулевая степени числа.

В практике часто для краткого обозначения больших чисел пользуются степенями числа 10. Так, например, среднее расстояние от Земли до Солнца в миллионах километров (приближённо) равно 150 *млн. км.* Это число можно записать так: 150 000 000 *км* или кратко: $150 \cdot 10^6$ *км.* Средний радиус земного шара в миллионах метров выражается числом 6,37 (*млн. м*); кратко это число запишется так: $6{,}37 \cdot 10^6$ *м.* В астрономии за единицу измерения больших расстояний принят парсек. Парсек составляет 30 800 000 000 000 *км.* Кратко это число принято записывать так: $30{,}8 \cdot 10^{12}$ *км.* Так, например, расстояние от Земли до ближайшей звезды (альфа Центавра) равно 1,3 парсек, в километрах это составит (приближённо) $40 \cdot 10^{12}$ *км.*

Для краткой записи малых чисел в виде степеней числа 10 приняты следующие обозначения. Принято считать, что

$$\frac{1}{10}=10^{-1};\quad \frac{1}{100}=10^{-2};\quad \frac{1}{1000}=10^{-3};\quad \frac{1}{1\,000\,000}=10^{-6}$$

и вообще

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}.$$

Так, например, бактерии (палочковидные) имеют длину от $\frac{2}{10\,000}$ до $\frac{5}{10\,000}$ *см*. Кратко эти числа запишем так: $2 \cdot 10^{-4}$ *см* и $5 \cdot 10^{-4}$ *см*.

Диаметр молекулы воды равен (приближённо) $\frac{3}{100\,000\,000}$ *см*, или $3 \cdot 10^{-8}$ *см*.

Определение. — **n-й (где n натуральное число) степенью числа a, не равного нулю, считается число, обратное n-й степени основания a.**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Нулевая степень числа a ($a \neq 0$) считается равной 1.

$$a^0 = 1.$$

Так, например:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^5} = \frac{3125}{32};$$

$$10^0 = 1.$$

Примечание. Отрицательная и нулевая степени нуля не имеют смысла. Так, например, 0^{-2}, 0^{-3}, 0^0 — выражения, не имеющие смысла.

§ 64. Приведение дробей к общему знаменателю.

Основное свойство дроби даёт возможность алгебраические дроби с различными знаменателями преобразовать в тождественные им дроби с одинаковыми знаменателями (говорят: привести дроби к общему знаменателю).

Такое преобразование приходится производить, как и в арифметике, при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями.

Из рассмотрения нескольких примеров выведем общее правило приведения дробей к общему знаменателю.

1. Дроби с одночленными знаменателями. Приведём к общему знаменателю дроби:

$$\frac{m}{4ab^5}; \quad \frac{n}{6a^3c^2}; \quad \frac{p}{9a^4b^2}.$$

Общий знаменатель должен делиться на каждый из данных знаменателей. Составим его в таком порядке.

1) Коэффициент общего знаменателя должен делиться на 4, на 6 и на 9. Наименьшим таким числом будет 36.

2) Общий знаменатель должен делиться на a, на a^3 и на a^4. Значит, он должен содержать множитель a^4.

3) Точно так же найдём, что буква b должна войти в знаменатель в пятой степени, а буква c — во второй степени.

В итоге получим общий простейший знаменатель $36a^4b^5c^2$.

Чтобы получить в первой дроби знаменатель $36a^4b^5c^2$, надо её числитель и знаменатель умножить на $9a^3c^2$. Получим:

$$\frac{m}{4ab^5} = \frac{9a^3c^2m}{36a^4b^5c^2}.$$

Таким же образом найдём:

$$\frac{n}{6a^3c^2} = \frac{6ab^5n}{36a^4b^5c^2} \quad \text{и} \quad \frac{p}{9a^4b^2} = \frac{4b^3c^2p}{36a^4b^5c^2}.$$

За общий знаменатель можно было бы взять, например, одночлен $72a^5b^7c^3$, так как он делится на каждый из знаменателей данных дробей. Однако этот одночлен имеет больший коэффициент и содержит буквы в более высоких степенях, чем одночлен $36a^4b^5c^2$.

Одночлен $36a^4b^5c^2$ для данных дробей является простейшим общим знаменателем.

Отсюда следует, что *простейший общий знаменатель дробей с одночленными знаменателями есть наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей, умноженное на все различные буквы, входящие в знаменатели, причём каждая буква берётся с наибольшим показателем, с каким она входит в знаменатели.*

Примечание. Алгебраическую дробь с дробными коэффициентами числителя и знаменателя всегда можно заменить дробью,

у которой числитель и знаменатель имеют целые коэффициенты. Так, например, дробь $\frac{0{,}25a^2b}{\frac{8}{3}xy}$ можно заменить дробью $\frac{\frac{1}{4}a^2b}{\frac{8}{3}xy}=\frac{3a^2b}{32xy}$.

2. Дроби с многочленными знаменателями. Приведем к общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{4x^2-4y^2};\quad \frac{b}{5x^2+10xy+5y^2};\quad \frac{c}{10x^2-20xy+10y^2}.$$

Разложим на множители знаменатели:

$$4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)=4(x+y)(x-y);$$
$$5x^2+10xy+5y^2=5(x^2+2xy+y^2)=5(x+y)^2;$$
$$10x^2-20xy+10y^2=10(x^2-2xy+y^2)=10(x-y)^2.$$

Составим общий знаменатель так же, как и в случае одночленных знаменателей.

Коэффициентом общего знаменателя будет наименьшее общее кратное чисел 4, 5 и 10, то есть 20.

Множитель $(x+y)$ возьмём в наибольшей степени, в которой он входит в знаменатели, то есть во второй. Множитель $(x-y)$ также возьмём во второй степени.

Простейший общий знаменатель будет:

$$20(x+y)^2(x-y)^2.$$

Дроби примут следующий вид:

$$\frac{a}{4x^2-4y^2}=\frac{a}{4(x+y)(x-y)}=\frac{5a(x+y)(x-y)}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$
$$\frac{b}{5x^2+10xy+5y^2}=\frac{b}{5(x+y)^2}=\frac{4b(x-y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$
$$\frac{c}{10x^2-20xy+10y^2}=\frac{c}{10(x-y)^2}=\frac{2c(x+y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2};$$

(Проверить при $x=2$, $y=1$, $a=b=c=10$.)

Отсюда такое правило:

Чтобы привести к простейшему общему знаменателю алгебраические дроби с многочленными знаменателями, надо знаменатели разложить на множители. Простейшим общим знаменателем будет наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей, умноженное на все различные множители, входящие в знаменатели, причём ка-

ждый множитель берётся с наибольшим показателем, с каким он входит в знаменатели.

Примечание. Если какой-нибудь из знаменателей не разлагается на множители, то он берётся весь целиком как множитель.

§ 65. Сложение дробей.

Задача 1. *В первом классе роздали a тетрадей, во втором b тетрадей. Каждый ученик получил по m тетрадей. Сколько было учеников в обоих классах?*

Решим задачу двумя способами.

1-й способ.

1) Сколько было учеников в первом классе?

$$\frac{a}{m} \text{ учеников.}$$

2) Сколько было учеников во втором классе?

$$\frac{b}{m} \text{ учеников.}$$

3) Сколько было учеников в обоих классах?

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right) \text{ учеников.}$$

2-й способ.

1) Сколько роздано тетрадей в обоих классах?

$$(a+b) \text{ тетрадей.}$$

2) Сколько было учеников в обоих классах?

$$\frac{a+b}{m} \text{ учеников.}$$

Сравнивая оба ответа, заключаем, что

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}. \qquad (1)$$

Справедливость этого равенства для любых рациональных значений a, b и $m\,(m \neq 0)$ можно показать так.

Мы знаем свойство деления (§ 21): чтобы разделить сумму на какое-либо число, можно разделить каждое слагаемое на это число и полученные частные сложить. Значит,

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$$

Читая это равенство справа налево, получим равенство (1). Значит, сложение выполнено нами верно.

Правило. ***Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и сумму разделить на их общий знаменатель.***

При сложении дробей с различными знаменателями надо предварительно привести их к общему знаменателю.

Задача 2. *Школьники выехали на экскурсию в город. Они проехали до станции на лошадях a километров со скоростью v км в час, затем поездом b километров со скоростью, в m раз большей. Сколько часов школьники находились в пути?*

Решение.

1) До станции школьники ехали $\frac{a}{v}$ часов.

2) Скорость поезда равна mv *км* в час.

3) Школьники ехали поездом $\frac{b}{mv}$ часов.

4) Всего школьники пробыли в пути $\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{mv}\right)$ часов.

Чтобы упростить полученный ответ, произведём сложение. Так как знаменатели дробей различны, то надо дроби сначала привести к общему знаменателю. Легко видеть, что общий знаменатель mv. Значит, числитель и знаменатель первой дроби надо умножить на m. Получим:

$$\frac{a}{v}+\frac{b}{mv}=\frac{am}{mv}+\frac{b}{mv}=\frac{am+b}{mv}.$$

§ 66. Вычитание дробей.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: вычесть одно выражение из другого — значит найти такое третье выражение, которое, будучи сложено с вычитаемым, даст уменьшаемое.

Отсюда следует правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

Чтобы вычесть дробь из другой дроби с тем же знаменателем, надо из числителя уменьшае-

мого вычесть числитель вычитаемого и разность разделить на их общий знаменатель:

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Чтобы доказать справедливость этого равенства, сложим вычитаемое с разностью:

$$\frac{b}{m}+\frac{a-b}{m}=\frac{b+a-b}{m}=\frac{a}{m}.$$

Получили уменьшаемое. Значит, вычитание произведено верно.

При вычитании дробей с различными знаменателями надо предварительно привести их к общему знаменателю, а затем применить правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример. Произведём вычитание дробей:

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}.$$

Общий знаменатель $b(b+c)$.
Получим:

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}=\frac{a(b+c)-ab}{b(b+c)}=\frac{ac}{b(b+c)}.$$

§ 67. Умножение дробей.

Правило умножения алгебраических дробей такое же, как и для арифметических дробей.

Правило. ***Чтобы перемножить дроби, надо перемножить отдельно их числители и их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем произведения:***

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Так как целое выражение можно рассматривать как дробь со знаменателем, равным единице, то приведённое правило применяется и в том случае, когда некоторые из сомножителей — целые выражения.

§ 68. Деление дробей.

Рассматривая деление как действие обратное умножению, получим следущее правило для деления дробей:

Чтобы разделить дробь на дробь, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Докажем справедливость этого равенства. Умножим полученное частное на делитель:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Получили делимое. Значит, деление произведено верно.

Так как всякое целое выражение можно рассматривать как дробь со знаменателем 1, то приведённое правило применимо и в том случае, когда делимое или делитель — целое выражение.

§ 69. Возведение дроби в натуральную степень.

Чтобы возвести данную дробь, например $\frac{2}{3}$, в квадрат, надо эту дробь умножить саму на себя. Применив правило умножения дробей, получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}.$$

Мы видим, что у получившейся дроби числитель равен квадрату числителя, а знаменатель равен квадрату знаменателя данной дроби.

Возведём данную дробь в куб:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Мы видим, что у получившейся дроби числитель и знаменатель равны кубу числителя и знаменателя данной дроби.

Правило. ***Чтобы возвести дробь в какую-либо степень, достаточно возвести в эту степень числитель и знаменатель данной дроби:***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Для доказательства этого правила применим правило умножения дробей:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}}=\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Пример.

$$\left(\frac{4a^2b}{3x}\right)^3=\frac{(4a^2b)^3}{(3x)^3}=\frac{64a^6b^3}{27x^3}.$$

§ 70. Дробные уравнения.

До сих пор мы решали только уравнения целые относительно неизвестного, то есть уравнения, в которых знаменатели (если таковые имелись) не содержали неизвестное.

Часто приходится решать уравнения, содержащие неизвестное в знаменателях; такие уравнения называются дробными.

Примеры.

1. $\frac{1}{x-3}=2.$ (1)

Чтобы решить это уравнение, умножим обе его части на $x-3$, то есть на многочлен, содержащий неизвестное. Будет ли новое уравнение равносильно данному? Чтобы ответить на вопрос, решим это уравнение.

Умножив обе части его на $x-3$, получим:

$$1=2(x-3). \qquad (2)$$

Решив это уравнение первой степени, найдём:

$$x=\frac{7}{2}.$$

Итак, уравнение (2) имеет единственный корень $x=\frac{7}{2}$.

Подставив его в уравнение (1), получим:

$$\frac{1}{\frac{7}{2}-3}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2;\quad 2=2.$$

Значит, $x=\frac{7}{2}$ является корнем и уравнения (1).

Других корней уравнение (1) не имеет. В нашем примере это видно, например, из того, что в уравнении (1)

$x-3$ как неизвестный делитель должен быть равен делимому 1, разделённому на частное 2, то есть

$$x-3=1:2=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$x=\frac{1}{2}+3; \quad x=\frac{7}{2}.$$

Итак, уравнения (1) и (2) имеют единственный корень $x=\frac{7}{2}$. Значит, они равносильны.

2. Решим теперь такое уравнение:

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{x+1}{x-3}+\frac{8}{(x-1)(x-3)}=0. \quad (1)$$

Простейший общий знаменатель: $(x-1)(x-3)$; умножим на него все члены уравнения:

$$\frac{(x+5)(x-1)(x-3)}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x-3}+$$
$$+\frac{8(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)}=0.$$

После сокращения получим:

$$(x+5)(x-3)-(x+1)(x-1)+8=0.$$

Раскроем скобки:

$$x^2+5x-3x-15-x^2+1+8=0.$$

Приведя подобные члены, будем иметь:

$$2x-6=0. \quad (2)$$

Решив это уравнение, найдём:

$$x=3.$$

Подставив $x=3$ в уравнение (1), получим:

$$\frac{8}{2}-\frac{4}{0}+\frac{8}{0}=0.$$

В левой части получили выражения, не имеющие смысла.

Значит, $x=3$ корнем уравнения (1) не является. Отсюда следует, что уравнения (1) и (2) неравносильны.

Говорят в этом случае, что уравнение (1) приобрело **посторонний корень**.

Сравним решение уравнения (1) с решением уравнений, рассмотренных нами раньше (см. § 51). При решении этого уравнения нам пришлось выполнить две такие операции, которые раньше не встречались: во-первых, мы умножили обе части уравнения на выражение, **содержащее неизвестное** (общий знаменатель), и, во-вторых, мы сокращали алгебраические дроби на **множители, содержащие неизвестное**.

Сравнивая уравнение (1) с уравнением (2), мы видим, что не все значения x, допустимые для уравнения (2), являются допустимыми для уравнения (1).

Именно числа 1 и 3 не являются допустимыми значениями неизвестного для уравнения (1), а в результате преобразования они стали допустимыми для уравнения (2). Одно из этих чисел $x=3$ оказалось решением уравнения (2), но, разумеется, решением уравнения (1) оно быть не может. Уравнение (1) решений не имеет.

Этот пример показывает, что при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, и при сокращении алгебраических дробей может получиться уравнение, неравносильное данному, а именно: могут появиться посторонние корни.

Отсюда делаем такой вывод. При решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе, полученные корни надо проверять подстановкой в первоначальное уравнение. Посторонние корни надо отбросить.

Примеры:

1. $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x+2}$.

Значения 2 и -2 не являются допустимыми для x, так как при этих значениях уравнение теряет смысл.

Простейший знаменатель:

$$(x-2)(x+2)=x^2-4.$$

Умножив на него обе части уравнения и произведя сокращение, получим уравнение:

$$(x+1)(x+2)=(x-3)(x-2).$$

Решив его, найдём $x=\frac{1}{2}$. Подстановка в данное уравнение показывает, что $x=\frac{1}{2}$ является и его корнем.

2. $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}$. (1)

И здесь простейший общий знаменатель x^2-4 (причём $x\neq 2$ и $x\neq -2$). Умножив на него обе части уравнения, получим:

$$(x+1)(x+2)-(x-3)(x-2)=12; \quad (2)$$
$$x^2+3x+2-x^2+5x-6=12;$$
$$8x-4=12, \quad x=2.$$

Итак, уравнение (2) имеет корень $x=2$. Но он является посторонним для уравнения (1), так как 2 ие является допустимым значением для x.

Значит, уравнение (1) не имеет корней.

§ 71. Примеры решения уравнений с буквенными коэффициентами.

Покажем на примерах решение уравнений первой степени с буквенными коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение:

$$a(x-2)+3x=a(x+2)-3, \quad (1)$$

где a — данное число.

1) Раскроем скобки:

$$ax-2a+3x=ax+2a-3. \quad (2)$$

2) Перенесём члены, содержащие неизвестное, в левую, а свободные члены — в правую часть:

$$3x=2a-3+2a.$$

3) Приведём подобные члены:

$$3x=4a-3. \quad (3)$$

Разделив обе части уравнения (3) на 3, получим следующее решение:

$$x=\frac{4a-3}{3}. \quad (4)$$

Если букве a придать какое-нибудь определённое значение, например положить $a=3$, то уравнение (1) обратится в уравнение с числовыми коэффициентами:

$$3(x-2)+3x=3(x+2)-3.$$

Теперь нет необходимости решать это последнее уравнение, так как достаточно заменить a в формуле (4) числом 3:

$$x=\frac{4\cdot 3-3}{3}=3.$$

Пример 2. Решить уравнение:

$$mx-(3-m)=2(x+5). \qquad (1)$$

1) Раскроем скобки:

$$mx-3+m=2x+10. \qquad (2)$$

2) Перенесём члены, содержащие неизвестное, в левую, а свободные члены — в правую часть:

$$mx-2x=10+3-m$$

3) Приведём подобные члены:

$$(m-2)x=13-m. \qquad (3)$$

Это последнее уравнение мы сможем решить, если коэффициент при x не равен нулю (то есть $m-2\neq 0$, или $m\neq 2$):

$$x=\frac{13-m}{m-2}. \qquad (4)$$

Если $m=2$, то $m-2=0$; на нуль делить нельзя, а потому нельзя применять формулу (4).

Уравнение (3) равносильно уравнению (1); но если в уравнение (3) подставить $m=2$, то получится уравнение $0\cdot x=11$, которое не имеет корней.

Поэтому при $m=2$ уравнение (3), а значит, и уравнение (1) не имеют корней.

Пример 3.

$$\frac{x-2}{2}-1=\frac{x-4}{a}. \qquad (1)$$

При $a=0$ правая часть уравнения теряет смысл. Говорят, что $a=0$ не является допустимым значением для a. Поэтому будем считать, что a не равно нулю.

1) Умножив обе части уравнения на $2a$, после сокращений получим:

$$a(x-2)-2a=2(x-4).$$

2) Раскроем скобки:

$$ax-2a-2a=2x-8.$$

3) Сгруппируем члены, содержащие неизвестное, в одной части, а свободные члены — в другой:

$$ax-2x=-8+2a+2a.$$

4) Приведём подобные члены:

$$ax-2x=4a-8,$$

или

$$(a-2)x=4(a-2). \qquad (2)$$

Если коэффициент при x не равен нулю, получим:

$$x=4.$$

Если $a=2$, то уравнение (2) примет вид:

$$0 \cdot x=0$$

Очевидно, что это равенство будет верным при любом значении x, так как нуль, умноженный на любое число, даст в результате нуль.

Уравнение (1), равносильное уравнению (2), будет удовлетворяться всеми значениями x. Это можно проверить, подставив $a=2$ в данное уравнение (1):

$$\frac{x-2}{2}-1=\frac{x-4}{2}, \text{ или } \frac{x-4}{2}=\frac{x-4}{2}.$$

Последнее равенство верно при всех значениях x.

Окончательный ответ запишем так:

1) $x=4$, если $a \neq 0$ и $a \neq 2$.

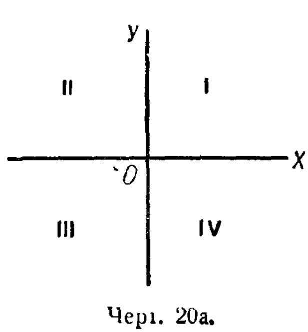
2) Уравнению удовлетворяет любое число, если $a=2$ (напомним, что при $a=0$ заданное уравнение теряет смысл, а потому значение $a=0$ не рассматривается).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

КООРДИНАТЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФИКИ.

§ 72. Координаты точки на плоскости.

Проведём на плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси: первая ось OX и вторая ось OY (черт. 20а). Эти оси будем называть осями координат. Первая ось OX (изображённая на чертеже 20а в горизонтальном положении) называется осью абсцисс. Вторая ось OY (изображённая на чертеже 20а в вертикальном положении) называется осью ординат. Точка O пересечения осей координат называется началом координат. Эту точку будем считать «нулевой» точкой для обеих осей. Положительные числа будут изображаться на оси абсцисс точками вправо, а на оси ординат — точками вверх от нулевой точки. Отрицательные числа будут изображаться точками влево и вниз от начала координат O. Плоскость, на которой даны оси координат, кратко называется координатной плоскостью.

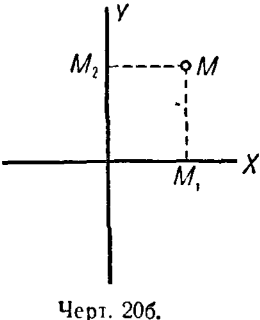


Черт. 20а.

Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые четвертями (или квадрантами).

Принято эти четверти нумеровать (римскими цифрами) в том порядке, как показано на чертеже 20а.

Возьмём на плоскости произвольную точку M и опустим из неё перпендикуляры на оси координат. Пусть M_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс. *Число, которое точка M_1 изображает на оси абсцисс, называется абсциссой точки M.* Пусть M_2 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось ординат (черт. 20б). *Число, которое точка M_2 изображает на оси ординат, называется ординатой точки M.* На чертеже 21 абсцисса точки M равна 3, а ордината 5, абсцисса точки A равна — 2, ордината — 3; абсцисса точки B равна —2; ордината 4.



Черт. 20б.

Абсцисса и ордината называются координатами данной точки плоскости.

Координаты точки записываются в скобках справа от обозначения точки. Первой записывается абсцисса, а за ней ордината.

Так, запись M (3; 5) обозначает, что абсцисса точки M равна трём, а ордината — пяти.

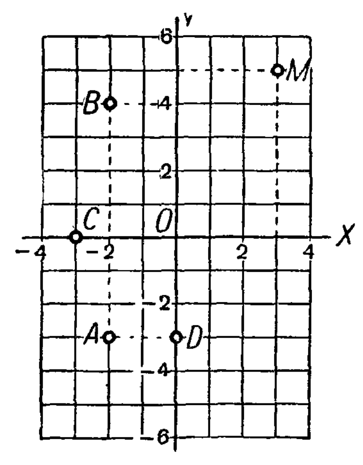
Рассмотрим некоторые частные положения точки.

Если точка лежит на оси абсцисс, то её ордината равна нулю.

Так, например, точка C на чертеже 21 имеет координаты — 3 и 0.

Если точка лежит на оси ординат, то её абсцисса равна нулю, например точка D (0; — 3) (черт. 21).

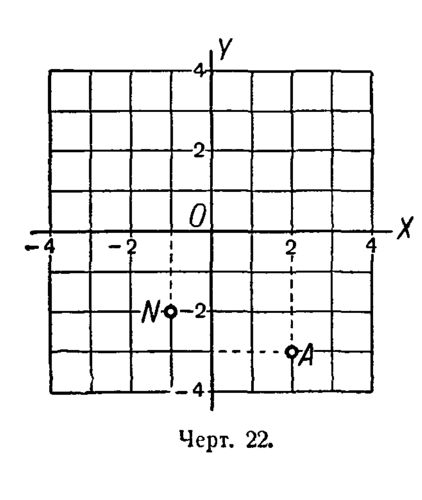
Наконец, начало координат — точка O — имеет и абсциссу и ординату, равные нулю: O (0; 0).



Черт. 21.

З а д а ч а 1. *Построить точку по данным её координатам, например построить точку А (2; —3).*

Решение. На оси абсцисс (черт. 22) находим точку 2 и проводим из неё перпендикуляр к этой оси. На оси ординат находим точку —3 и проводим из неё перпендикуляр к этой оси. Пересечение перпендикуляров и даст искомую точку *А*.



Черт. 22.

Таким образом, если заданы два числа в определённом порядке, то есть указано, какое из этих чисел считается первым (абсцисса), какое вторым (ордината), то такая пара чисел определяет на координатной плоскости положение точки.

Значит, **координаты точки — это числа, определяющие её положение на плоскости.**

З а д а ч а 2. *На плоскости даны оси координат и произвольная точка N. Найти её координаты.*

Решение ясно из определения координат точки. Проводим из заданной точки перпендикуляры к осям координат. Основания этих перпендикуляров и определят её координаты.

Так, на чертеже 22 заданная точка *N* имеет координаты (—1; —2).

§ 73. Прямо пропорциональная зависимость.

В арифметике уже изучались прямо пропорциональные величины.

Приведём примеры таких величин.

1) Путь (при равномерном движении) и время, в течение которого этот путь пройден.

Пусть скорость равномерного движения равна 3 *км* в час. Обозначим длину пройденного пути через y, а число часов, за которое этот путь пройден, через x; тогда зависимость между этими двумя величинами выразится равенством:

$$y = 3x.$$

2) Стоимость отреза материи и число метров в отрезе.

Пусть 1 *м* материи стоит 8 руб. Тогда, если обозначить через x число метров в отрезе, а через y стоимость всего отреза, зависимость между этими двумя величинами можно выразить равенством:

$$y = 8x.$$

3) Длина окружности и длина её диаметра.

Известно, что для определения длины любой окружности надо длину её диаметра умножить на некоторое число, одно и то же для всех окружностей и приближённо равное 3,14.

Значит, зависимость между длиной окружности и длиной её диаметра можно (приближённо) выразить равенством:

$$y = 3{,}14x,$$

где x — длина диаметра, а y — длина окружности.

Из рассмотренных равенств получим:

$$\frac{y}{x} = 3; \quad \frac{y}{x} = 8: \quad \frac{y}{x} = 3{,}14.$$

Из этих равенств видно, что отношение соответственных значений двух прямо пропорциональных величин всегда остаётся одним и тем же. В первом примере оно равно 3, во втором 8 и в третьем 3,14.

Из приведённых примеров можно сделать следующий вывод.

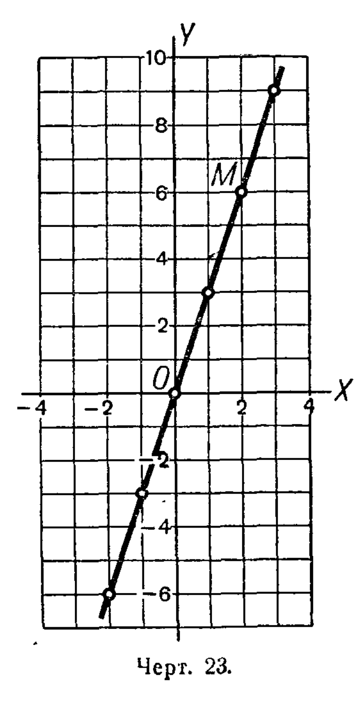
Если две величины прямо пропорциональны, то при любом значении одной величины, например x, соответствующее значение y будет равно этому значению x, умноженному на одно и то же число.

Такая зависимость называется *прямо пропорциональной* зависимостью.

Определение. **Зависимость между двумя величинами x и y, выражающаяся формулой $y = kx$, где k — число, не равное нулю, называется прямо пропорциональной зависимостью.**

Число k называется коэффициентом пропорциональности. В первом примере $k = 3$, во втором $k = 8$, а в третьем $k = 3{,}14$.

В предыдущих примерах x и y могли принимать только положительные значения. Теперь, дав общее определение прямо пропорциональной зависимости для двух величин, мы можем снять это ограничение. В дальнейшем x, следовательно, и y могут принимать любые значения.



Черт. 23.

§ 74. График прямо пропорциональной зависимости.

Рассмотрим прямо пропорциональную зависимость с некоторым определённым коэффициентом пропорциональности. Например, $y = 3x$. При помощи системы координат на плоскости можно наглядно изобразить данную зависимость. Объясним, как это делается.

Дадим x какое-нибудь числовое значение; положим, например, $x = 2$ и вычислим соответствующее значение y; в нашем примере $y = 3 \cdot 2 = 6$.

Построим на координатной плоскости точку с абсциссой $x = 2$ и с ординатой $y = 6$. Эту точку M (2; 6) назовём точкой, соответствующей значению $x = 2$ (черт. 23).

Будем придавать x различные значения и для каждого значения x построим соответствующую точку на плоскости.

Составим такую таблицу (в верхней строчке будем выписывать те значения, которые мы придаём x, а под ними в нижней строчке — соответствующие значения y):

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	−9	−6	−3	0	3	6	9	...

Составив таблицу, построим для каждого значения x соответствующую ему точку на координатной плоскости.

Нетрудно проверить (приложив, например, линейку), что все построенные точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

Разумеется, x можно придавать любые значения, а не только те, которые выписаны в таблице. Можно брать любые дробные значения, например:

$$x=\frac{1}{2};\quad x=\frac{3}{2};\quad x=10{,}7 \text{ и т. п.}$$

Нетрудно проверить, вычислив значения y, что соответствующие точки расположатся на той же прямой.

Если для каждого значения построить соответствующую ему точку, то на плоскости выделится множество точек (в нашем примере прямая), координаты которых находятся в зависимости $y=3x$.

Это множество точек плоскости (то есть построенная на чертеже 23 прямая) называется **графиком зависимости** $y=3x$.

Построим график прямо пропорциональной зависимости с отрицательным коэффициентом пропорциональности. Положим, например, $y=-2x$.

Поступим так же, как и в предыдущем примере: будем придавать x различные числовые значения и вычислять соответствующие значения y.

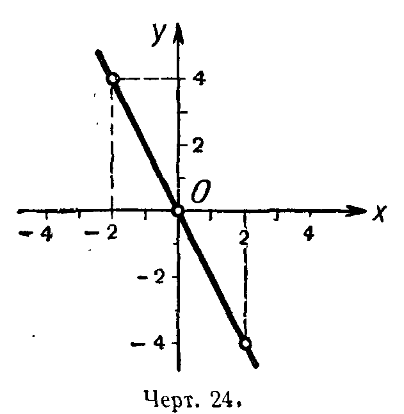
Составим, например, такую таблицу:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	−2	−4	−6

Построим на плоскости соответствующие точки.

Из чертежа 24 видно, что, как и в предыдущем примере, точки плоскости, координаты которых находятся в зависимости $y = -2x$, расположены на одной прямой, проходящей через начало координат и расположенной во II и IV четвертях.

Ниже (в курсе VIII класса) будет доказано, что *графиком прямо пропорциональной зависимости с любым коэффициентом пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.*



Черт. 24.

Можно строить график прямой пропорциональности гораздо проще и легче, чем строили до сих пор.

Для примера построим график зависимости

$$y = 2x.$$

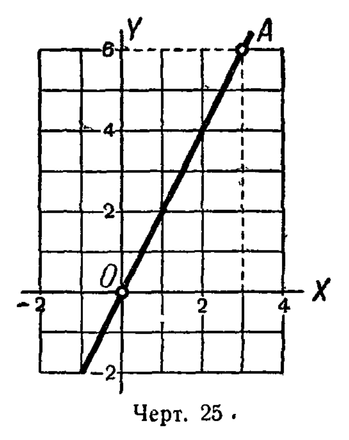
Мы знаем, что графиком должна быть прямая, проходящая через начало координат.

Но прямая линия определяется двумя своими точками. Значит, чтобы построить прямую, достаточно знать две её точки.

Одну точку, через которую должен проходить график, мы уже знаем — это точка O (0; 0) — начало координат.

Чтобы найти вторую точку, дадим величине x произвольное значение, например $x = 3$. (Лучше взять число, не очень близкое к нулю, чтобы получить точку, не очень

близкую к началу координат; тогда чертёж будет точнее.) Получим $y=6$. Итак, точка A (3; 6) лежит на искомой прямой. Построив эту точку, проведём через неё и через начало координат прямую (черт. 25.) Эта прямая и будет графиком прямой пропорциональности, выраженной формулой $y=2x$.



Черт. 25.

§ 75. Линейная зависимость.

1. Определение линейной зависимости.

Задача. *Пионерский отряд отправился из города в поход. Сейчас он находится в 5 км от города и идёт со скоростью 3 км в час. На каком расстоянии от города он будет через x часов?*

Решение. За x часов отряд пройдет $3x$ километров. Да ещё ранее он прошёл 5 *км*. Значит, через x часов расстояние от города будет равно $(3x+5)$ километрам. Обозначив это расстояние через y, будем иметь:

$$y=3x+5.$$

Это равенство выражает зависимость пути от времени, но это уже не будет прямо пропорциональная зависимость, как легко видеть из следующей таблицы:

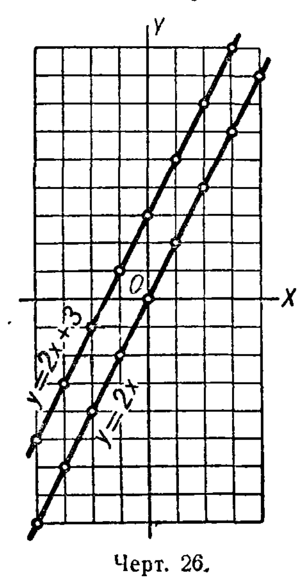
x	1	2	3
y	8	11	14

Отношение пути ко времени здесь не равно одному и тому же числу.

Определение. **Зависимость между двумя величинами x и y, выражающаяся формулой $y=kx+b$, где k и b — числа, называется линейной зависимостью.**

В частности, если $b=0$, то $y=kx$.

Значит, прямо пропорциональная зависимость является частным случаем линейной зависимости.



Черт. 26.

2. График линейной зависимости. Построим график какой-либо данной линейной зависимости; положим, например,

$$y = 2x + 3.$$

Поступим следующим образом. Построим сначала график зависимости

$$y = 2x.$$

Это будет прямая, проходящая через начало координат (черт. 26).

Посмотрим, как будут расположены относительно этой прямой точки графика линейной зависимости: $y = 2x + 3$.

Составим, например, такую таблицу значений x и y:

x	-2	-1	0	1	2	3
$2x$	-4	-2	0	2	4	6
$2x+3$	-1	1	3	5	7	9

Мы видим, что при любой абсциссе ордината точки второго графика на 3 единицы больше ординаты точки первого графика. Значит, и соответствующая точка второго графика будет на 3 единицы выше точки первого.

Построив эти точки, получим прямую, параллельную первой прямой (черт. 26).

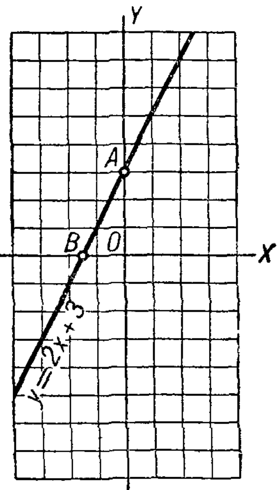
Графиком линейной зависимости является прямая.

Отсюда следует, что для построения графика линейной зависимости достаточно найти две его точки.

Покажем это на рассмотренном примере $y = 2x + 3$.

Положив $x = -1$, получим $y = 1$. Итак, одну точку $(-1; 1)$ мы нашли. Положив ещё $x = 2$, получим $y = 7$. Вторая точка $(2; 7)$. Построив эти точки и проведя через них прямую, получим искомый график, то есть график линейной зависимости, выраженной формулой $y = 2x + 3$.

Обычно для построения графика линейной зависимости берут две точки, в которых прямая пересекает оси координат. Так, полагая $x = 0$, получим $y = 3$. Полагая $y = 0$, получим $x = -\frac{3}{2}$. Проведя прямую через точки A $(0; 3)$ и $B\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, получим искомый график (черт. 27).



Черт. 27.

§ 76. Обратно пропорциональная зависимость.

1. Определение обратно пропорциональной зависимости.

Наряду с прямо пропорциональными величинами в арифметике рассматривались также и величины обратно пропорциональные.

Приведём примеры.

1) Длины основания и высоты прямоугольника при постоянной площади.

Пусть требуется выделить для огорода прямоугольный участок площадью в 600 *кв. м.*

Мы можем произвольно установить, например, длину участка. Но тогда ширина участка будет зависеть от того, какую длину мы выбрали. Различные (возможные) значения длины и ширины приведены в таблице.

Длина в метрах	20	30	40	50	60
Ширина в метрах	30	20	15	12	10
Площадь в квадратных метрах	600	600	600	600	600

Вообще, если обозначить длину участка через x, а ширину — через y, то зависимость между ними можно выразить формулой:

$$xy = 600.$$

Выразив y через x, получим:

$$y = \frac{600}{x}.$$

Давая x произвольные значения, будем получать соответствующие значения y.

2) Время и скорость равномерного движения при определённом расстоянии.

Пусть расстояние между двумя городами равно 200 *км*. Чем больше будет скорость движения, тем меньше времени потребуется, чтобы проехать данное расстояние. Это видно из следующей таблицы:

Скорость в километрах в час	10	20	40	50	80
Время в часах	20	10	5	4	$2\frac{1}{2}$
Путь в километрах	200	200	200	200	200

Вообще, если обозначить скорость через x, а время движения — через y, то зависимость между ними выразится формулой:

$$xy = 200.$$

Определение. **Зависимость между двумя величинами x и y, выраженная равенством $xy = k$, где k — определённое число (не равное нулю), называется обратно пропорциональной зависимостью.**

Число k и здесь называется коэффициентом пропорциональности.

Так же, как и в случае прямой пропорциональности, в равенстве $xy = k$ величины x и y в общем случае могут принимать положительные и отрицательные значения.

Но во всех случаях обратной пропорциональности ни одна из величин не может быть равной нулю. В самом деле, если хоть одна из величин x или y будет равна нулю, то в равенстве $xy = k$ левая часть будет равна ну-

лю, а правая — некоторому числу, не равному нулю (по определению), то есть получится неверное равенство.

2. График обратно пропорциональной зависимости. Построим график зависимости $xy = 9$.

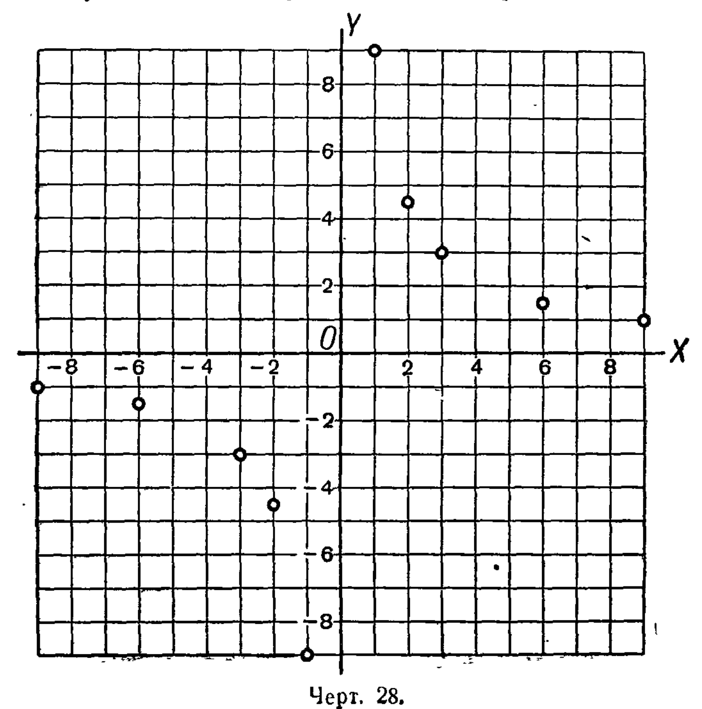
Выразив y через x, получим:

$$y = \frac{9}{x}.$$

Будем давать x произвольные (допустимые) значения и вычислим соответствующие значения y. Получим таблицу:

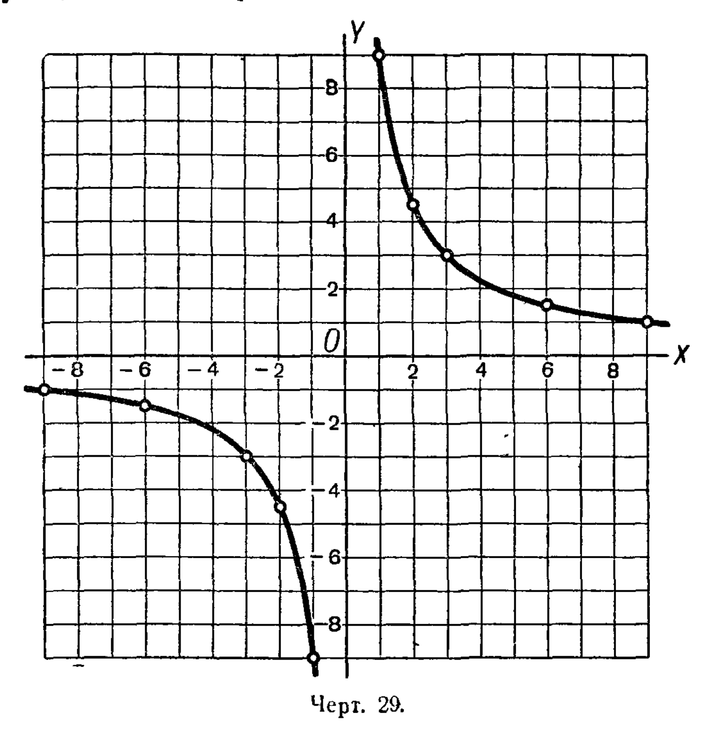
x	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9
y	-1	$-1\frac{1}{2}$	-3	$-4\frac{1}{2}$	-9	9	$4\frac{1}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	1

Построим соответствующие точки (черт. 28).



Черт. 28.

Если будем брать значения x через меньшие промежутки, то и точки расположатся теснее.



Черт. 29.

При всевозможных значениях x соответствующие точки расположатся на двух ветвях графика, симметричных относительно начала координат и проходящих в I и III четвертях координатной плоскости (черт. 29).

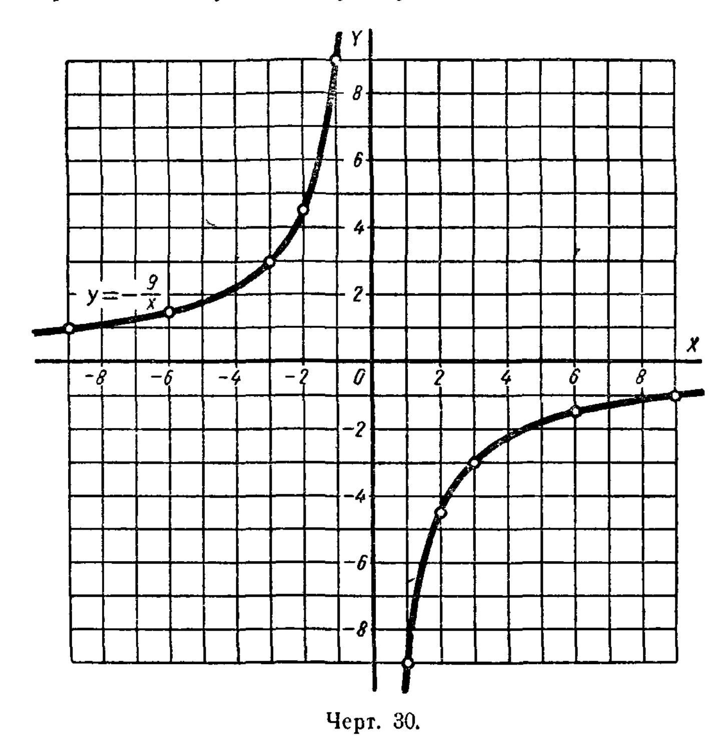
Итак, мы видим, что графиком обратной пропорциональности является кривая линия. Эта линия состоит из двух ветвей.

Одна ветвь получится при положительных, другая — при отрицательных значениях x.

График обратно пропорциональной зависимости называется гиперболой.

Чтобы получить более точный график, надо строить возможно больше точек.

С достаточно большой точностью гиперболу можно начертить, пользуясь, например, лекалами.



Черт. 30.

На чертеже 30 построен график обратно пропорциональной зависимости $y = -\frac{9}{x}$ с отрицательным коэффициентом. Составив, например, такую таблицу:

x	-6	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	6
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	9	18	-18	-9	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}$

получим гиперболу, ветви которой расположены во II и IV четвертях.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ.

§ 77. Уравнение первой степени с двумя неизвестными.

В главе IV мы изучали уравнения, содержащие одно неизвестное; однако уравнение может содержать не одно, а несколько неизвестных, обозначенных буквами. Сформулируем определение уравнения в общем виде.

Определение. **Уравнением называется равенство, в котором одно или несколько чисел, обозначенных буквами, являются неизвестными.**

Пусть, например, сказано, что сумма квадратов двух неизвестных чисел x и y равна 7; это можно записать при помощи следующего уравнения с двумя неизвестными:

$$x^2+y^2=7.$$

Для уравнений с двумя неизвестными остаются справедливыми все те свойства, которые были установлены для уравнений с одним неизвестным (§ 48).

Уравнением первой степени с двумя неизвестными называется уравнение вида

$$ax+by=c, \qquad (1)$$

где x и y — неизвестные, a и b (коэффициенты при неизвестных) — данные числа, не равные оба нулю, c (свободный член) — любое данное число.

Примеры уравнений первой степени:

$$5x-2y=1;\ \ 3x+y=4.$$

Уравнения:

1) $5x-2y+3=2x+y-1$; 2) $y=1,7x$;

3) $y=4x-9$; 4) $\frac{x}{3}-3=\frac{74}{5}$

после переноса членов, содержащих неизвестные, в левую часть, а известных чисел — в правую часть приводятся к виду (1), а потому эти уравнения также являются уравнениями первой степени.

Уравнение (1) называется **нормальным видом** уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Из приведённых примеров видно (примеры 2 и 3), что рассмотренные ранее равенства, выражающие прямо пропорциональную и линейную зависимости, являются уравнениями первой степени с двумя неизвестными.

Равенство, выражающее обратно пропорциональную зависимость, например $xy=8$, уже не является уравнением первой степени.

Рассмотрим какое-нибудь уравнение с двумя неизвестными, например:

$$2x-y=3.$$

Возьмём какую-либо пару чисел, например: $x=1$, $y=-1$. Подставив эти значения в данное уравнение, получим верное равенство:

$$2-(-1)=3.$$

Говорят, что эта пара чисел **удовлетворяет** данному уравнению или что она (эта пара) есть **решение** данного уравнения.

Возьмём теперь такую пару чисел: $x=2$, $y=4$.

Подставив эти значения в данное уравнение, получим в его левой части $2\cdot2-4=0$. При этих значениях левая часть (нуль) оказалась не равной правой части (т. е. числу 3). Говорят, что пара чисел $x=2$, $y=4$ не **удовлетворяет** данному уравнению или что она не есть решение уравнения.

Каждая пара значений x и y, подстановка которых в уравнение с двумя неизвестными x и y обращает его в верное равенство, называется решением этого уравнения.

Решим такую задачу.

Задача. *Сумма двух чисел равна 6. Чему равно каждое слагаемое?*

Обозначим через x и y искомые слагаемые.

Задача приводит к уравнению:

$$x + y = 6.$$

Дадим x какое-либо значение, например $x = 2$, тогда для другого неизвестного y получим уравнение:

$$2 + y = 6,$$

из которого найдём $y = 4$. Пара чисел $x = 2$, $y = 4$ даёт решение нашей задачи.

Однако вместо $x = 2$ мы могли бы взять какое-нибудь другое значение для x, например $x = 1$, и тогда мы нашли бы $y = 5$. Значит, мы получили ещё одно решение уравнения: $x = 1$, $y = 5$.

В таблице приведено несколько решений данного уравнения: значения x и y записаны друг под другом, а в нижней строчке показано, что сумма этих значений равна 6.

x	6	8	-15	11,3
y	0	-2	21	$-5{,}3$
$x + y$	6	6	6	6

Ясно, что одному из неизвестных (например, x) можно придать любое значение и, подставив его в данное уравнение, найти соответствующее значение другого неизвестного.

Как видим, задача имеет бесконечное множество решений.

Уравнение не даёт определённого ответа на вопрос задачи. Оно лишь указывает на зависимость между двумя неизвестными. На основании этой зависимости, зная значение одного неизвестного, мы могли найти значение и другого.

Итак, *уравнение первой степени, содержащее два неизвестных, имеет бесконечное множество решений.*

Одному из неизвестных можно придать произвольное значение и из данного уравнения найти соответствующее значение другого неизвестного.

Мы уже видели, что в случае линейной (в частности, прямо пропорциональной) зависимости, выражающейся уравнением первой степени с двумя неизвестными, графиком является прямая линия. Докажем, что прямая линия будет графиком и любого уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Начнём с примера. Возьмём уравнение:

$$19x - 6y = -4.$$

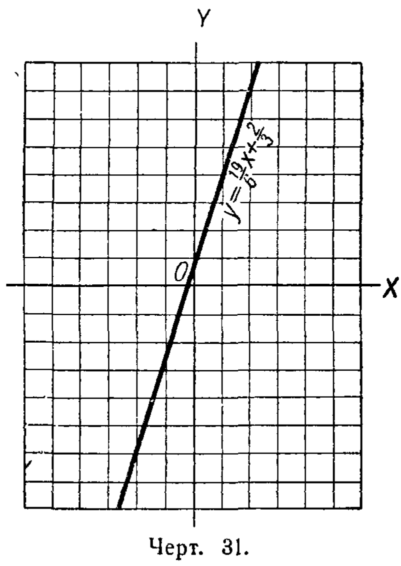
Выразив в нём неизвестное y через x, получим:

$$6y = 19x + 4;$$

$$y = \frac{19}{6}x + \frac{2}{3}.$$

Мы видим, что это уравнение представляет собой не что иное, как линейную зависимость

$y = kx + b$ при $k = \frac{19}{6}$ и $b = \frac{2}{3}$.



Черт. 31.

Значит, графиком этого уравнения является прямая линия (черт. 31).

Какое бы уравнение первой степени, содержащее два неизвестных x и y, мы ни взяли, всегда можно выразить одно из неизвестных, например y, через другое (через x) и получить уравнение (равносильное данному), выражающее линейную зависимость $y = kx + b$. Например, если $2x + 3y = 5$, то $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Отсюда вывод:

Графиком уравнения первой степени с двумя неизвестными является прямая линия.

Примечание. Мы рассматривали выше уравнения, содержащие два неизвестных, однако может оказаться, что коэффициент

при одном из неизвестных будет равен нулю, так что уравнение запишется в виде уравнения с одним неизвестным.

Возьмём, например, уравнение:

$$x+2y-3=2(y-x)+5.$$

Приведём это уравнение к нормальному виду:

$$3x+0\cdot y=8.$$

Это уравнение также имеет бесконечное множество решений; ему удовлетворяет любая пара чисел $x=\frac{8}{3}$, y, где y — произвольное число. Обычно член $0\cdot y$ не пишут и уравнение записывают так: $3x=8$.

§ 78. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Пусть даны два уравнения с двумя неизвестными, например:

$$\begin{cases} x+2y=13; \\ 3x-y=4. \end{cases} \qquad (1)$$

Каждое из них имеет бесконечное множество решений.

Поставим вопрос: среди всех этих решений не будут ли общие для обоих уравнений?

Такие общие решения могут быть, а могут и не быть.

Так, общим решением данных уравнений будет $x=3$, $y=5$, что легко проверить подстановкой. (Дальше будет показано, что других общих решений эти уравнения иметь не могут.)

Но, например, уравнения

$$x+2y=15 \text{ и } x+2y=7 \qquad (2)$$

не имеют ни одного общего решения. В самом деле, какие бы значения мы ни давали x и y, выражение $x+2y$ не может одновременно равняться 15 и 7. Поэтому ни одно решение первого уравнения не может быть решением второго и ни одно решение второго уравнения не может быть решением первого.

Если отыскиваются общие решения двух или нескольких уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют систему.

Пара чисел $x=3$, $y=5$ есть решение системы (1), а система (2) не имеет решений.

Всякая пара значений неизвестных, удовлетворяющая обоим уравнениям, образующим систему, называется решением данной системы.

Решить систему — это значит найти все её решения.

§ 79. Равносильные системы.

Понятие равносильности для систем уравнений определяется так же, как и для уравнений (см. § 47).

Определение. **Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если все решения каждой из них являются решениями и другой.**

Системы, не имеющие решений, также считаются равносильными.

При решении системы уравнений, как и при решении уравнений с одним неизвестным, приходится переходить от данной системы к другой, более простой, от неё — к третьей и так далее, пока не получится простейшая система вида $\begin{cases} x=a; \\ y=b, \end{cases}$ которая сразу даёт значения неизвестных.

Возникает вопрос: будут ли все системы, которыми заменяется данная система, равносильны ей? Ведь только в этом случае мы можем быть уверены, что полученные решения будут решениями и данной системы уравнений, а также, что мы не получим посторонних решений.

Укажем на некоторые преобразования, после выполнения которых можно быть уверенным, что новая система будет равносильна данной.

1. *Можно любое из уравнений системы заменить равносильным ему уравнением.*

Например, системы:

$$\begin{cases} 2x-3y=4; \\ 3x+2y=19 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x-6y=8; \\ 9x+6y=57 \end{cases}$$

равносильны, так как первое и второе уравнения первой системы заменены равносильными (§ 48, свойство 2).

Если имеем два уравнения $A = B$ и $C = D$, то уравнение $A + C = B + D$ обычно называют суммой, а уравнение $A - C = B - D$ — разностью данных уравнений.

2. *Можно любое из уравнений системы заменить суммой или разностью данных уравнений, оставив другое уравнение без изменений.*

Например, системы

$$\begin{cases} 4x - 6y = 8; \\ 9x + 6y = 57 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 13x = 65; \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

равносильны, так как первое уравнение второй системы является суммой уравнений первой системы, а второе уравнение второй системы то же, что первое первой системы.

3. *Можно из одного уравнения системы выразить какое-либо неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение. Новое уравнение вместе с первым образуют систему, равносильную данной.*

Например, системы

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23; \\ x - 2y = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2(2y + 1) + 3y = 23; \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

равносильны (в первом уравнении x заменён выражением, найденным из второго уравнения).

§ 80. Решение систем уравнений.

Систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными можно решить несколькими различными способами.

1. Способ алгебраического сложения.

Примеры.

1. Решим систему:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17; \\ 2x + 3y = 11. \end{cases}$$

Коэффициенты при y в обоих уравнениях одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому если вместо, например, первого уравнения

возьмём сумму данных уравнений, то в этой сумме сократятся члены, содержащие неизвестное y.

Получим систему:

$$\begin{cases} 7x = 28; \\ 2x + 3y = 11. \end{cases}$$

Эта система равносильна данной (§ 79, п. 2). Но в ней первое уравнение содержит только одно неизвестное x, из него найдём: $x = 4$.

Подставив это значение x во второе уравнение, получим уравнение, содержащее одно неизвестное:

$$8 + 3y = 11,$$

из которого получим $y = 1$.

Решением системы является пара чисел: $\begin{cases} x = 4; \\ y = 1. \end{cases}$

2. Решим систему:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 2; \\ 6x - 11y = 26. \end{cases}$$

Коэффициент при x во втором уравнении втрое больше, чем в первом. Умножим поэтому обе части первого уравнения на 3. Получим систему (§ 48, свойство 2), равносильную данной:

$$\begin{cases} 6x - 21y = 6; \\ 6x - 11y = 26. \end{cases}$$

Коэффициенты при x стали одинаковыми. Возьмём разность этих уравнений:

$$-10y = -20 \text{ и } y = 2.$$

Подставив 2 вместо y в одно из данных уравнений, найдём $x = 8$.

Решение системы: $\begin{cases} x = 8. \\ y = 2. \end{cases}$

Мы могли бы уравнять коэффициенты не при x, а при y, умножив первое уравнение на 11, а второе на 7.

Из приведённых примеров видно, что решение системы уравнений способом алгебраического сложения заключается в следующем:

1. Уравниваем абсолютные величины коэффициентов при одном из неизвестных.

2. Производим сложение полученных уравнений, если равные по абсолютной величине коэффициенты имеют противоположные знаки. Если же они имеют одинаковые знаки, то производим вычитание.

3. Полученное уравнение содержит одно неизвестное; находим это неизвестное.

4. Подставляем найденное значение неизвестного в одно из данных уравнений и находим значение второго неизвестного.

2. Способ подстановки.

Возьмём систему:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17; \\ 2x + 3y = 11. \end{cases} \qquad (1)$$

Выразив из второго уравнения одно из неизвестных, например x, через другое, получим:

$$x = \frac{11 - 3y}{2}. \qquad (2)$$

Подставим это выражение для x в первое уравнение:

$$5 \cdot \frac{11 - 3y}{2} - 3y = 17. \qquad (3)$$

Система уравнений (2) и (3) равносильна системе уравнений (1) (§ 79, п. 3). Из уравнения (3) $y = 1$.

Подставив $y = 1$ в уравнение (2), найдём:

$$x = \frac{11 - 3 \cdot 1}{2}; \quad x = 4.$$

Решение системы: $\begin{cases} x = 4; \\ y = 1. \end{cases}$

Из этого примера видим, что решение системы уравнений способом подстановки заключается в следующем:

1. В одном из данных уравнений выражаем одно неизвестное через другое.

2. Подставляем полученное выражение в другое данное уравнение.

3. Решаем полученное уравнение, содержащее одно неизвестное; находим это неизвестное.

4. Подставляем найденное значение неизвестного в полученное выражение для другого неизвестного и находим второе неизвестное.

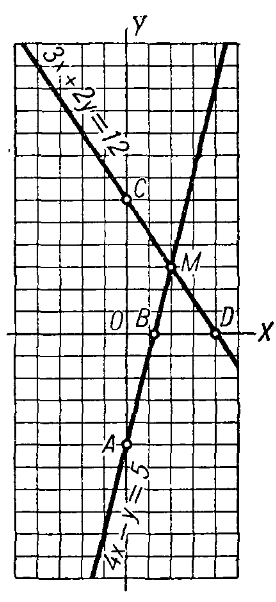
Способ подстановки удобно применять тогда, когда один из коэффициентов при неизвестном равен единице.

§ 81. Графическое решение системы двух уравнений.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} 4x - y = 5; \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Построим график каждого из этих уравнений. Графиком первого уравнения будет прямая AB (черт. 32), проходящая через точки A (0; —5) и B $\left(\frac{5}{4};\ 0\right)$; графиком второго — прямая CD, проходящая через точки C (0; 6) и D (4; 0).



Черт. 32.

Координаты точек прямой AB дают множество всех решений первого уравнения, а координаты точек прямой CD дают множество всех решений второго уравнения. Значит, если эти уравнения имеют общее решение, то соответствующая этому решению точка должна лежать и на прямой AB и на прямой CD, то есть прямые AB и CD должны иметь общую точку. Из чертежа видим, что такой общей точкой является точка M, координаты которой ($x = 2$; $y = 3$) и образуют решение системы. Действительно, подстановка значений $x = 2$; $y = 3$ в уравнения системы даёт верные равенства:

$$4 \cdot 2 - 3 = 5,$$
$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12.$$

Итак, графический способ решения **заключается** в следующем:

1. Строим график каждого из данных уравнений.

2. Находим координаты точки пересечения построенных прямых (если они пересекаются).

Эти координаты и образуют решение системы.

Число решений системы. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными позволяет легко установить число решений системы.

Две прямые могут пересекаться, могут совпадать и могут быть параллельными.

Рассмотрим эти три случая.

1. *Прямые пересекаются.* В этом случае они имеют одну общую точку. (Как известно, более одной общей точки две несовпадающие прямые иметь не могут.) Координаты этой общей точки и дают *единственное решение* системы. Примером является только что рассмотренная система:

$$\begin{cases} 4x - y = 5; \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

2. *Прямые совпадают.* В этом случае координаты каждой точки общего графика данных уравнений дают решение системы, и, следовательно, система имеет *бесконечное множество решений.*

Пример.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 4x + 6y = 14. \end{cases}$$

Графиком обоих уравнений является одна и та же прямая, проходящая через точки $A\left(0;\ \frac{7}{3}\right)$ и $B\left(\frac{7}{2};\ 0\right)$. Координаты любой точки этой прямой являются решением системы. Это и понятно. Если разделить обе части второго уравнения на 2, то получим равносильное ему уравнение:

$$2x + 3y = 7.$$

Но это будет как раз первое из данных уравнений. Уравнения, образующие данную систему, равносильны. Всякое решение одного из этих уравнений есть решение

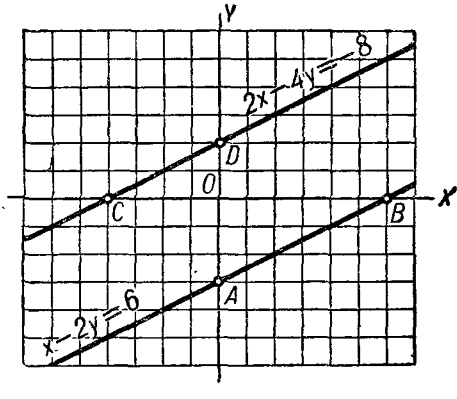
другого. Значит, можно рассматривать лишь одно из данных уравнений, а другое (ему равносильное) отбросить. Итак, фактически мы имеем здесь одно уравнение с двумя неизвестными. А такое уравнение, как мы знаем, имеет бесконечное множество решений.

3. *Прямые параллельны.* В этом случае прямые не имеют ни одной общей точки. Значит, и система уравнений, графиками которых являются эти прямые, не имеет решений.

Пример.

$$\begin{cases} x - 2y = 6. \\ 2x - 4y = -8. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения будет прямая AB (черт. 33), проходящая через точки A (0; —3) и B (6; 0).



Черт. 33.

Графиком второго уравнения будет прямая CD, проходящая через точки D (0; 2) и C (—4; 0).

Как видим, эти прямые параллельны. Система не имеет решений.

В этом можно убедиться и следующим образом.

Разделим обе части второго уравнения на 2. Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x - 2y = 6; \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

Любая пара значений x и y, удовлетворяющая первому уравнению, должна дать для выражения $x-2y$ значение 6 и не может, следовательно, равняться -4, как это следует из второго уравнения.

Итак, мы показали:

1. Если прямые — графики данных уравнений — пересекаются, то система имеет единственное решение.

2. Если прямые совпадают, то система имеет бесконечное множество решений.

3. Если прямые параллельны, то система не имеет решений.

Заметим, что будут верны и обратные положения:

1. Если система имеет единственное решение, то прямые (график данных уравнений) пересекаются.

2. Если система имеет бесконечное множество решений, то прямые совпадают.

3. Если система не имеет решений, то прямые параллельны.

Все эти положения легко доказываются методом от противного.

§ 82. Решение задач.

Решение очень многих задач может быть приведено к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными.

В частности, все задачи, в которых требуется узнать два неизвестных числа и которые мы до сих пор решали с помощью уравнения с одним неизвестным, можно решить и с помощью системы уравнений. Приведём пример.

Задача 1. *Для детского сада купили на* 24,4 *руб.* 16 *больших и малых мячей. Большой мяч стоит* 2,5 *руб., малый* 1,2 *руб. Сколько было куплено тех и других мячей в отдельности?*

Эта задача была уже решена (§ 52) с помощью уравнения с одним неизвестным. Решим её теперь с помощью системы уравнений:

1) число малых мячей x штук;

2) число больших мячей y штук;

3) по условию

$$x+y=16. \qquad (1)$$

Одно уравнение составлено. Для составления второго уравнения используем остальные данные задачи:

4) стоимость всех малых мячей $1{,}2x$ рублей;

5) стоимость всех больших мячей $2{,}5y$ рублей;

6) по условию

$$1{,}2x + 2{,}5y = 24{,}4. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) составляют систему. Решим её. Умножим первое уравнение на 12, второе на 10 и вычтем первое из второго, тогда получим:

$$13y = 52; \quad y = 4.$$

Подставив найденное значение y в первое уравнение, найдём:

$$x = 12.$$

Итак, малых мячей было куплено 12, а больших 4.

Задача 2. *В двух корзинах было* 148 *яблок, причём во второй было в* 3 *раза больше яблок, чем в первой. Сколько яблок было в каждой корзине?*

И в этой задаче требуется найти два неизвестных числа. Решим её с помощью системы уравнений. Введём обозначения:

1) число яблок в первой корзине x штук;

2) число яблок во второй корзине y штук;

3) по условию

$$x + y = 148. \qquad (1)$$

4) Во второй корзине было яблок в 3 раза больше, чем в первой. Следовательно,

$$y = 3x. \qquad (2)$$

Получили систему уравнений. Решить её удобнее способом подстановки, так как в уравнении (2) одно из неизвестных уже выражено через другое. Делая подстановку из (2) в (1), получим:

$$x + 3x = 148, \quad \text{или} \quad x = 37.$$

Подставив это значение в уравнение (2), найдем:

$$y = 111.$$

Итак, в первой корзине было 37, во второй — 111 яблок.

§ 83. Уравнение с тремя неизвестными.

1. Одно уравнение с тремя неизвестными.

Рассмотрим, например, такое уравнение с тремя неизвестными:

$$15x + 10y + 8z = 164. \qquad (1)$$

Можно показать, что уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Действительно, взяв для x и y какие-либо произвольные числа, например $x = 2$, $y = 5$, и подставив эти значения в уравнение, получим:

$$15 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 8z = 164,$$

или

$$80 + 8z = 164.$$

Откуда найдем: $z = \frac{21}{2}$.

Дав другие произвольные значения x и y, получим другое значение для z и т. д.

Итак, одно уравнение с тремя неизвестными имеет (в общем случае) бесконечное множество решений.

2. Система двух уравнений с тремя неизвестными.

Теперь рассмотрим систему двух уравнений с тремя неизвестными.

Присоединим к уравнению (1), например, следующее уравнение:

$$x + y + z = 16. \qquad (2)$$

Итак, имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными. Покажем, что и эта система имеет бесконечное множество решений. Убедимся подстановкой, что системе удовлетворяют, например, следующие тройки чисел:

1) $x = 2$, $y = 11$, $z = 3$; 2) $x = 4$, $y = 4$, $z = 8$.

Дадим теперь одному из неизвестных, хотя бы x, какое-либо произвольное значение, например $x = \frac{5}{2}$. Подставив это значение в уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} \frac{75}{2} + 10y + 8z = 164; \\ \frac{5}{2} + y + z = 16. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y + 4z = \frac{253}{4}; \\ y + z = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём: $y = \frac{37}{4}$; $z = \frac{17}{4}$.

Итак, система имеет ещё решение: $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{37}{4}$; $z=\frac{17}{4}$.

Взяв для x другое значение, получим новую систему с двумя неизвестными, из которой найдём y и z, и т. д.

Значит, вообще говоря, система двух уравнений с тремя неизвестными тоже имеет бесконечное множество решений.

Однако можно привести пример системы, не имеющей ни одного решения, например:

$$\begin{cases} x-y+2z=5; \\ x-y+2z=7. \end{cases}$$

Какие бы значения ни имели x, y и z, выражение $x-y+2z$ не может одновременно быть равно 5 и 7.

§ 84. Система трёх уравнений с тремя неизвестными.

Присоединим к уравнениям

$$15x+10y+8z=164, \quad (1)$$

$$x+y+z=16 \quad (2)$$

третье уравнение:

$$z=2y. \quad (3)$$

Получили систему трёх уравнений с тремя неизвестными.

Прежде всего заметим, что все свойства, о которых говорилось в § 48, остаются справедливыми и для системы уравнений с тремя (и более) неизвестными. Поэтому для решения данной системы применимы те же способы, что и для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

1. Способ алгебраического сложения.

Так как уравнение (3) уже не содержит x, то исключим x из системы уравнений (1) и (2). Для этого умножим обе части уравнения (2) на 15. Получим систему:

$$\begin{cases} 15x+15y+15z=240; \\ 15x+10y+8z=164. \end{cases}$$

Коэффициенты при x равны. Вычтем из первого уравнения второе, тогда получим:

$$5y+7z=76.$$

Получили уравнение с двумя неизвестными y и z. Вместе с уравнением (3) оно образует систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5y+7z=76; \\ z=2y. \end{cases}$$

Решив её одним из способов, изложенных в § 80, найдём:

$$y=4;\ z=8.$$

Подставив эти значения в (1) или (2) уравнение, найдём: $x=4$.

Итак, если данная система трёх уравнений с тремя неизвестными имеет решение, то это решение будет следующей тройкой чисел:

$$x=4;\ y=4;\ z=8.$$

Подставляя эти значения в данную систему, можно убедиться, что полученная тройка чисел является решением системы.

2. Способ подстановки.

Для данной системы этот способ более удобен, так как в уравнении (3) неизвестное z уже выражено через y. Сделав подстановку в уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} 15x+10y+16y=164; \\ x+y+2y=16, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 15x+26y=164; & (4) \\ x+\ 3y=16. & (5) \end{cases}$$

Решим эту систему любым способом, изложенным в § 80, например способом алгебраического сложения.

Умножим уравнение (5) на 15 и вычтем из него уравнение (4):

$$19y=76.$$

Отсюда найдём: $y=4$.

Подставив найденное значение y в уравнение (5), найдём: $x=4$. Наконец, подставив значение y в (3), найдём: $z=8$. Получили то же решение, что и первым способом.

Решим ещё систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=7; \\ x+4y-z=6; \\ 3x-2y+2z=14. \end{cases}$$

Исключим одно из неизвестных, например z. Для этого сложим первое и второе уравнения, получим:

$$3x+y=13.$$

Умножим теперь второе уравнение на 2 и сложим с третьим, получим:

$$5x+6y=26.$$

Оба полученных уравнения образуют систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x+\ y=13, \\ 5x+6y=26. \end{cases}$$

Решив её одним из известных способов, найдём: $x=4$, $y=1$. Подставив эти значения в одно из данных уравнений, например в первое, найдём: $z=2$. Итак, если данная система имеет решение, то оно может быть только такое: $x=4$; $y=1$; $z=2$. Подставив эти значения во второе и третье уравнения, убедимся, что они действительно дают решение данной системы.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

СЧЁТНАЯ (ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ) ЛИНЕЙКА.

Счётная линейка получила широкое применение в инженерных расчётах, а с повышением технического уровня нашей страны она становится необходимым инструментом не только инженера, но и квалифицированного рабочего.

Устройство счётной линейки основано на теории логарифмов, но для практического пользования линейкой можно обойтись без знания логарифмов.

Для того чтобы в совершенстве овладеть вычислениями на линейке, необходимо непрерывно упражняться и пользоваться ею при всевозможных расчётах на уроках математики, физики, химии, машиноведения, а также в мастерских и вне школы.

§ 85. Равномерные и неравномерные шкалы.

Рассмотрим обыкновенную миллиметровую линейку (черт. 34). На ней нанесён ряд делений с равными про-

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

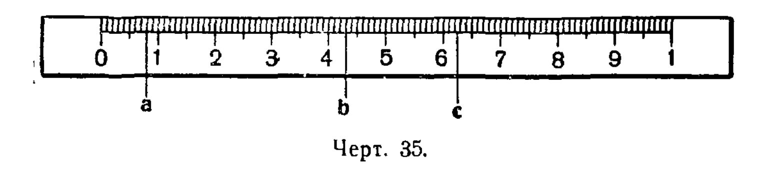
Черт. 34.

межутками в 1 *мм*; вначале стоит цифра 0, а под каждым десятым делением подписаны цифры 1, 2, 3, ..., 10. Такая миллиметровая линейка представляет пример равномерной шкалы.

Если принять за единицу длины отрезок в 1 *см*, то в точке *a* (черт. 35) мы прочтём число 0,8, в точке *b* 4,3,

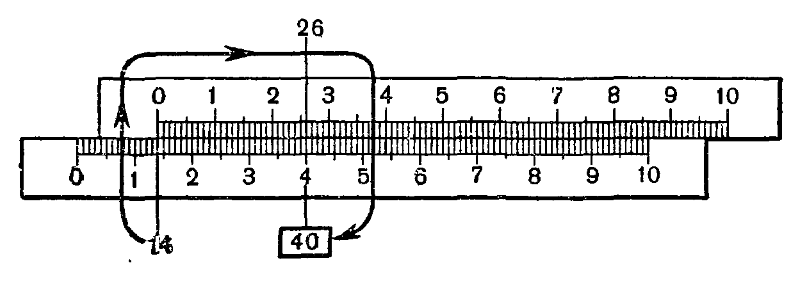
в точке c — 6,25. Если же положить, что единица выражается длиной не в 1 *см*, а в 1 *мм*, то штрих, помеченный цифрой 1, будет уже изображать число 10, и в точке a мы прочтём 8, в точке b — 43, в точке c — 62,5.

Итак, в зависимости от того, какую длину мы принимаем за единицу, значение одного и того же штриха шкалы изменяется.



Черт. 35.

Так как один и тот же штрих шкалы может обозначать различные числа, отличающиеся друг от друга в 10, 100, 1000 ... раз, то мы часто будем читать числа как цифровой ряд, не обращая внимания на положение запятой и нули в конце числа. Например, числа 6,25; 62,5; 625; 6250; 0,0625 читаются одинаково: — шесть — два — пять.



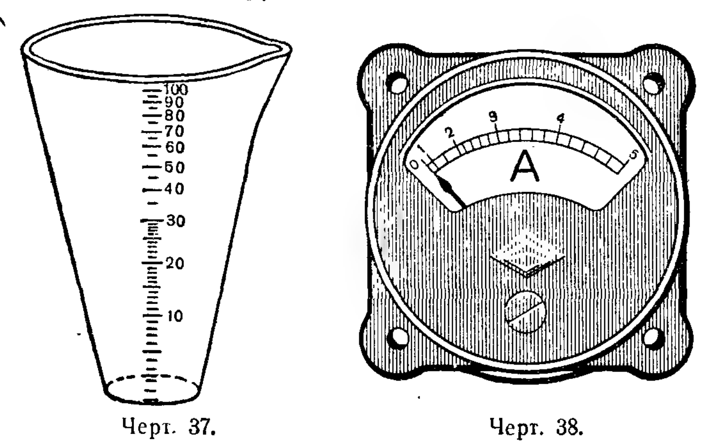
Черт. 36.

При помощи двух равномерных шкал можно устроить прибор для сложения и вычитания чисел. На чертеже 36 показано, как на таком приборе найти сумму 14 и 26.

Для того чтобы осуществить это сложение, нужно против 14 на нижней шкале поставить 0 (начало) верхней шкалы, и тогда против 26 верхней шкалы прочтём на нижней 40 $(14 + 26 = 40)$.

Легко сообразить, как на этом приборе можно производить вычитание двух чисел.

Но если вместо равномерных шкал воспользоваться специальными неравномерными шкалами, то оказывается возможным производить умножение, деление, возведение в степень и другие действия над числами.



Черт. 37. Черт. 38.

Познакомимся с некоторыми неравномерными шкалами.

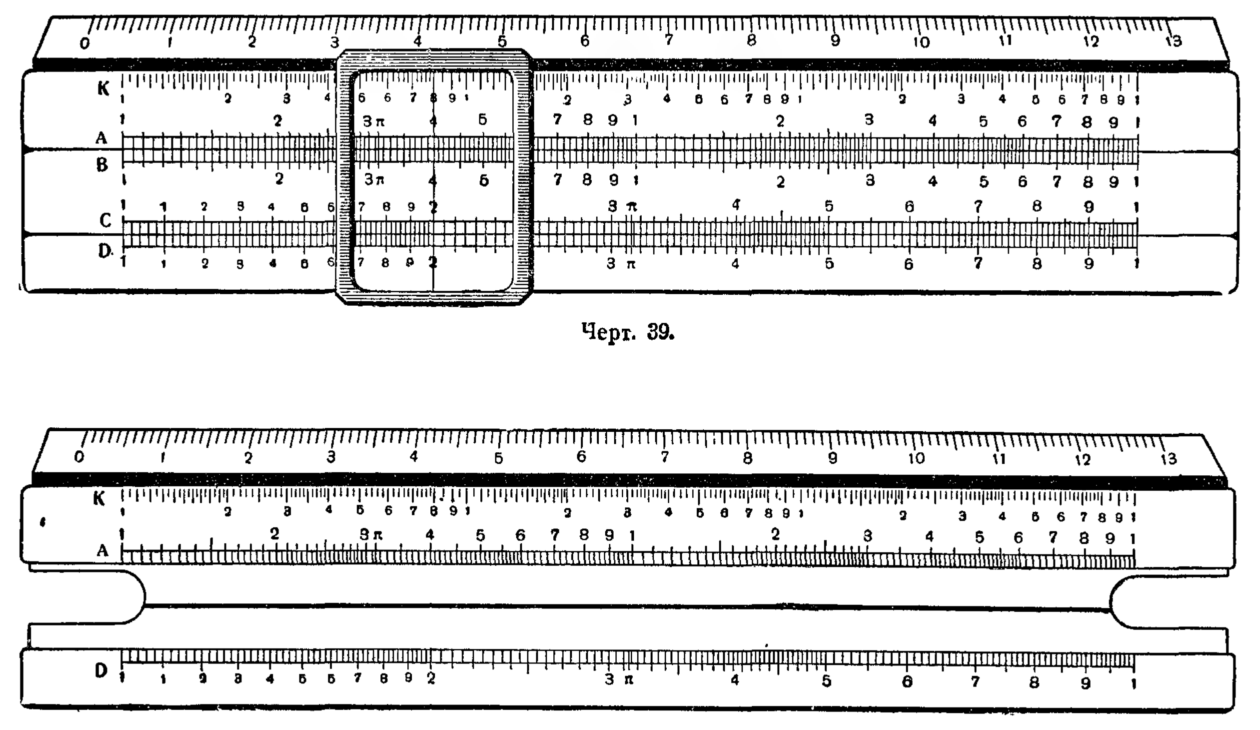
На чертеже 37 изображена мерная коническая мензурка, которая кверху расширяется, и расстояния между делениями шкалы постепенно уменьшаются, хотя соответствующие им объёмы жидкости равны. На мензурке мы видим неравномерную шкалу.

На многих электрических приборах можно увидеть неравномерные шкалы, например на амперметре (черт. 38), вольтметре и др. Дальше мы подробно рассмотрим неравномерные шкалы на счётной линейке.

§ 86. Устройство счётной (логарифмической) линейки.

Линейка в собранном виде показана на чертеже 39. Она состоит из трёх частей:

1) Корпус (черт. 39а), на котором имеется несколько шкал. Мы в дальнейшем рассмотрим шкалу D (основная

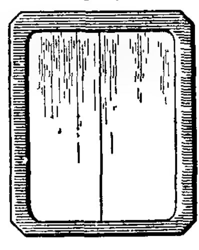


Черт. 39.

Черт. 39а.

шкала), шкалу *A* (шкала квадратов) и шкалу *K* (шкала кубов).

2) Движок (черт. 39б), который свободно передвигается в корпусе вправо и влево. В первоначальном положении все деления шкалы *C* движка совпадают с делениями основной шкалы корпуса.



Черт. 39в

3) Бегунок (черт. 39в) — металлическая рамка со стеклом, на котором нанесена черта, называемая **визирной чертой** или, короче, **визиром** (указатель). Бегунок передвигается вдоль корпуса и визирной чертой фиксирует на шкалах числа.

Нашей промышленностью выпускаются линейки разных размеров, но самыми практичными, а потому и наиболее распространёнными являются линейки с длиной шкалы в 250 *мм*.

§ 87. Основная шкала.

Рассмотрим на корпусе линейки шкалу *D* и научимся читать на ней различные числа.

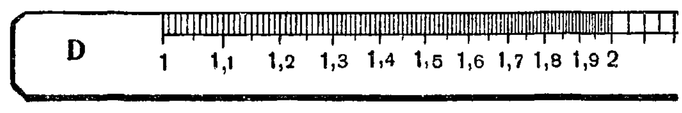
Черт. 39б.

Черт. 40.

Только после того как мы научимся свободно читать и устанавливать всевозможные числа на шкале, можно приступить к действиям на линейке.

На шкале нанесено десять основных штрихов, помеченных крупными цифрами 1, 2, 3 и т. д. (черт. 40). Промежутки между штрихами неравные (шкала неравномерная). Самый большой промежуток между цифрами 1 и 2. Последующие промежутки постепенно уменьшаются.

Эти штрихи соответствуют числам 1, 2, 3, . . . , 10, а также числам, которые больше или меньше их в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Это значит, что, например, штрих, помеченный цифрой 6, может, смотря по смыслу задачи, обозначать числа: 6; 60; 600; 0,6; 0,06 и т. д.



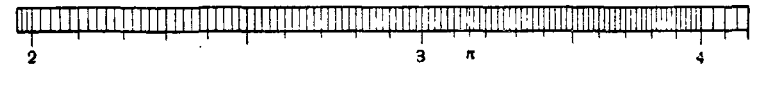
Черт. 41.

Промежутки между главными штрихами разделены на более мелкие части, и мы достаточно точно можем читать на шкале числа, записанные двумя и тремя значащими цифрами. Самый большой промежуток между цифрами 1 и 2 разделён на большее число частей, чем, например, промежуток между числами 9 и 10. На промежутке 1—2 (черт. 41. На этом чертеже, а также на чертежах 42 и 43 приведена в уменьшенном виде основная шкала нормальной линейки длиной 250 *мм*. Все остальные чертежи соответствуют линейке длиной 125 *мм*, на которой цена делений отличается от цены делений на нормальной линейке) отмечены более мелкими цифрами числа 1,1; 1,2; 1,3; . . . ; 1,9 и расстояние между ними разбито ещё на 10 частей.

Значит, промежуток 1—2 разбит на 100 частей, и цена одного деления от 1 до 2 равна 0,01. Последовательные штрихи изображают числа: 1; 1,01; 1,02; 1,03; . . .; 1,98; 1,99; 2.

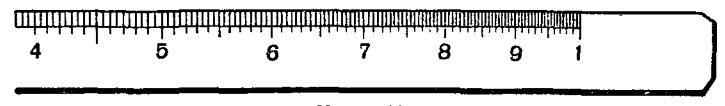
Рассмотрим теперь следующий участок шкалы между цифрами 2 и 3; 3 и 4 (черт. 42). Каждый из этих про-

межутков разделён уже не на 100, а на 50 частей, и цена деления здесь не 0,01, а 0,02. Последовательные штрихи, начиная от цифры 2, означают числа: 2,02; 2,04; 2,06; 2,08; 2,10; 2,12; 2,14; . . .; 2,96; 2,98; 3. Посредине между штрнхами будут находиться числа: 2,01; 2,03; 2,05 и т. д. Аналогично читаем деления на участке от 3 до 4.



Черт. 42.

В остальной части шкалы от 4 до 10 (черт. 43) промежутки между основными штрихами разделены сначала на 10 частей и затем каждая часть ещё пополам — всего, значит, на 20 частей. Следовательно, здесь цена каждого деления равна 0,05. Последовательные штрихи, начиная от цифры 4, означают числа: 4,05; 4,10; 4,15; . . .; 9,00; 9,05; 9,10; 9,15; . . .; 9,90; 9,95; 10.



Черт. 43.

Прежде чем приступить к выполнению действий на линейке, нужно научиться безошибочно читать на основной шкале числа. На чертеже 44 положению визира а) 1 — 0 — 6 могут соответствовать числа: 1,06; 10,6; 106; 1060; 0,106; 0,0106 и т. д. Аналогично можно прочитать числа, соответствующие положению визира: b) 1 — 7 —6, c) 2 — 0 — 5, d) 3 — 8 — 4, e) 8 — 5 — 5.

Очевидно, вычисления, производимые в начальном участке шкалы, дают несколько бо́льшую точность, чем в конце шкалы, но в целом можно полагать, что на линейке мы считаем с точностью, соответствующей трёхзначным та́блицам. Относительная погрешность вычислений на линейке примерно равна 0,3%, что́ для инженерных и других практических расчётов оказывается достаточным.

§ 88. Умножение и деление с помощью счётной линейки.

Умножение. По тому же принципу, как при помощи двух равномерных шкал можно было производить сложение чисел, теперь, пользуясь основной шкалой D на корпусе линейки и шкалой C на движке, будем производить умножение чисел.

Найдём произведение $2 \cdot 3$. Ставим визирную черту против метки 2 на основной шкале, затем передвигаем движок вправо так, чтобы метка 1 на движке пришлась против визирной черты; затем бегунок перемещаем вправо так, чтобы визир стоял против метки 3 на движке, тогда на основной шкале корпуса линейки читаем результат — 6 (черт. 45).

Таким же образом для произведения $1{,}37 \cdot 2{,}92$ получим на линейке: $1{,}37 \cdot 2{,}92 \approx 4$. Проверка умножением даёт $1{,}37 \cdot 2{,}92 = 4{,}0004 \approx 4{,}00$ (согласно правилу приближённых вычислений).

Найдём произведение $x = 3{,}4 \cdot 4{,}5$.

Поставив метку 1 движка над меткой 3,4 основной шкалы, замечаем, что метка 4,5 верхней шкалы (C) вышла за пределы корпуса линейки. В таком случае умножение надо произвести следующим образом.

Против 3,4 основной шкалы надо поставить не 1 (начало) движка, а конец движка (метку 1 справа), и тогда под делением 4,5 движка читаем 15,3 (черт. 46). Перемножив данные числа, найдём $3{,}4 \cdot 4{,}5 = 15{,}30$, что по округлении до трёх цифр даёт то же число, которое было найдено на линейке.

Правило умножения двух чисел на линейке:

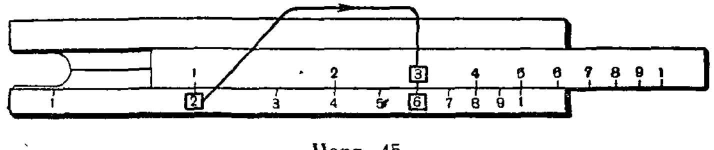
1) *Отмечаем визирной чертой на основной шкале (D) деление, соответствующее*

Черт. 44.

одному из сомножителей, и устанавливаем против него начало или конец движка.

2) *На шкале C движка находим деление, соответствующее другому сомножителю, и ставим над ним визир.*

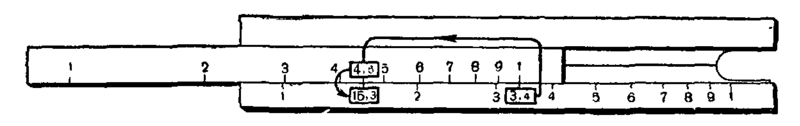
3) *Под визирной чертой на основной шкале (D) читаем произведение.*



Черт. 45.

Находя произведение 3,4 · 4,5, мы результат читаем как цифровой ряд: один — пять — три, что́ соответствует числам 153; 15,3; 1,53; 0,153 и т. д., но грубая прикидка показывает, что это может быть только 15,3. Поэтому мы в дальнейшем будем результат действий оценивать грубой прикидкой. Решая задачу о скорости поезда и получив на линейке цифры шесть — три, легко сообразить, что это будет 63 *км* в час, а не 6,3 *км* в час и не 630 *км* в час, если же речь идёт о скорости самолёта, то понятно, что надо принять 630 *км* в час, а не 63 *км* в час и не 6300 *км* в час.

Деление. Деление на линейке производится ещё проще, чем умножение. Разделим 6 на 3.

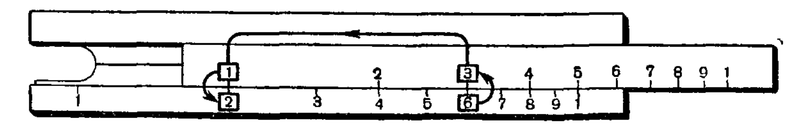


Черт. 46.

Отмечаем визирной чертой 6 на основной шкале корпуса линейки (*D*), ставим под визирную черту 3 на шкале *C* движка, тогда против 1 (начала) движка читаем частное 2 (черт. 47). Если надо разделить 4,25 на 5,13, то, поступая таким же образом, мы получим результат 0,828 против конца движка (черт. 48).

Правило деления:

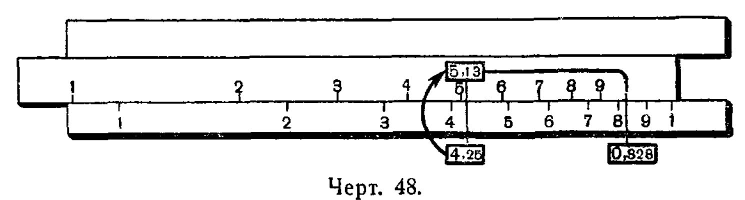
1) *Отмечаем визирной чертой делимое на основной шкале D корпуса линейки.*



Черт. 47.

2) *Против визирной черты устанавливаем деление движка, соответствующее делителю.*

3) *На основной шкале D против начала (или конца) движка читаем частное.*



Черт. 48.

Легко и быстро вычисляются различные сложные выражения, в которых надо сделать несколько умножений и делений, например:

$$x = \frac{13{,}8 \cdot 43{,}3}{16{,}7}$$

Черт. 49.

Здесь выгодней производить действия в таком порядке: сначала делим 13,8 на 16,7, а затем, не читая результата деления, умножаем на 43,3; ответ 35,8 получаем всего лишь при одном перемещении движка (черт. 49).

Выражение вида $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ вычисляются по схеме $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ (с стрелками: $a \searrow d \nearrow b \searrow e \nearrow c$).

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ.

§ 89. Построение графика зависимости $y=x^2$.

Рассмотрим зависимость между x и y, выражающуюся формулой:

$$y=x^2. \qquad (1)$$

В такой зависимости находятся длина (x) стороны квадрата и его площадь (y).

Для построения графика мы будем поступать так же, как поступали раньше при построении графиков линейной зависимости (см. § 74 и 75) и обратной пропорциональности (§ 76).

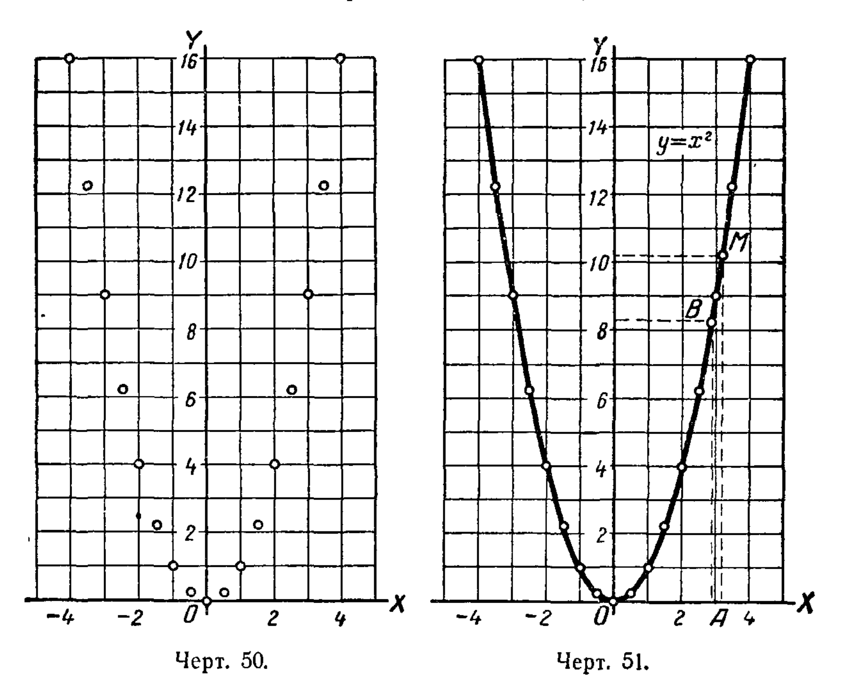
Составим, например, такую таблицу значений x и соответствующих значений y:

x	−4	−3,5	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	1,5	2	2,5
y	16	12,25	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	2,25	4	6,25

Построим по этой таблице точки (черт. 50) на координатной плоскости. Если будем давать x значения, промежуточные между уже взятыми, то точки расположатся на плоскости плотнее. При всевозможных значениях x все точки расположатся на некоторой линии (кривой), называемой параболой (черт. 51).

Из чертежа 51 видно, что весь график расположится в верхней полуплоскости (т. е. выше оси абсцисс) и лишь одна его точка O (0, 0) лежит на оси абсцисс.

Это и понятно: y есть квадрат числа x, поэтому y не может иметь отрицательных значений; запишем это так: $y \geqslant 0$ (читают: y — неотрицательное число).



Черт. 50. Черт. 51.

Мы видим далее, что все точки графика расположены попарно симметрично относительно оси ординат. Это и понятно. Так как $(-3)^2 = 3^2$; $(-5)^2 = 5^2$ и вообще $(-a)^2 = a^2$, то точки, имеющие абсциссы, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку, имеют одинаковые ординаты. Значит, каждой точке A $(x;\ y)$ графика соответствует точка B $(-x;\ y)$ того же графика, расположенная по другую сторону оси ординат на том же расстоянии от этой оси. Таким образом, ось ординат является осью симметрии графика зависимости $y = x^2$.

Аккуратно построенный график (например, на миллиметровой бумаге) можно использовать для приближён-

ного возведения чисел в квадрат, если не требуется большая точность вычислений.

Пусть, например, требуется найти квадрат числа 3,2. На оси абсцисс находим точку 3,2 (точка *A*) и из неё проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком в точке *M*. Ордината этой точки, приблизительно равная 10,2, и даст приближённое значение квадрата числа 3,2 (точное значение 10,24). Ординату можно найти или измерив длину перпендикуляра *AM*, или опустив из точки *M* перпендикуляр на ось ординат. Полученная точка на оси ординат покажет величину квадрата данного числа.

Примечание. Ввиду симметрии графика для практических вычислений достаточно начертить только ту его часть, которая расположена в первой четверти координатной плоскости. В самом деле, квадрат положительного числа находится непосредственно по графику; если же нужно найти квадрат отрицательного числа, например — 3,6, то ищем по графику квадрат числа 3,6, противоположного данному.

§ 90. Вычисление квадратов чисел по таблицам и при помощи счётной линейки.

Вычисление квадратов чисел по таблицам. Для практических вычислений составляются специальные таблицы, в которых приводятся квадраты чисел.

В учебном пособии В. М. Брадиса «Четырёхзначные математические таблицы» имеется таблица квадратов чисел, состоящих не более чем из четырёх цифр.

Квадраты чисел, состоящих из одной или двух цифр, находятся легко. В первом столбце таблицы размещены числа от 1 до 10 с промежутками в 0,1. Рядом с каждым из этих чисел во втором столбце помещён его квадрат, например:

$$4{,}3^2 = 18{,}49; \quad 5{,}6^2 = 31{,}36; \quad 8{,}0^2 = 64.$$

Если в первых двух столбцах таблицы не будем обращать внимания на запятые, то получим таблицу квадратов целых чисел от 10 до 100, например:

$$43^2 = 1849; \quad 56^2 = 3136; \quad 80^2 = 6400.$$

В самом деле, число 43 в 10 раз больше числа 4,3, то есть $43 = 10 \cdot 4,3$. Отсюда найдём, что 43^2 в 100 раз больше, чем $4,3^2$:

$$43^2 = 10^2 \cdot 4,3^2.$$

Увеличив число $4,3^2 = 18,49$ в 100 раз, мы и получим 1849.

Эти же два столбца могут служить для нахождения квадратов любых чисел, состоящих из двух цифр с нулями перед ними или после них.

Для этого надо запомнить правило:

Если в числе перенести запятую вправо или влево на несколько цифр, то в квадрате этого числа надо перенести запятую в ту же сторону на удвоенное количество цифр.

Возьмём, например, число 0,078. Оно в 100 раз меньше числа 7,8:

$$0,078 = \frac{1}{100} \cdot 7,8, \text{ откуда } (0,078)^2 = \frac{1}{10\,000} \cdot 7,8^2.$$

Значит, число $7,8^2 = 60,84$ надо уменьшить в 10 000 раз: $0,078^2 = 0,006084$, то есть надо перенести запятую на 4 знака влево.

Таблица квадратов в книге В. М. Брадиса, кроме двух столбцов, рассмотренных выше, содержит ещё столбцы, помеченные вверху и внизу номерами от 1 до 9. Эти столбцы служат для нахождения квадратов чисел от 1 до 10, состоящих из трёх цифр, то есть содержащих, кроме десятых долей, ещё и сотые.

Покажем на примере, как находить квадраты таких чисел.

Пусть требуется найти квадрат числа 7,24. В первом столбце находим число 7,2 (первые две цифры данного числа). В той же строке в столбце под номером 4 (третья цифра данного числа) находим число 52,42 — квадрат числа 7,24.

Но если мы будем находить квадрат числа 7,24 умножением, то получим:

$$7,24^2 = 7,24 \cdot 7,24 = 52,4176,$$

а не 52,42. Значит, в таблице дано лишь приближённое значение квадрата числа 7,24.

Число 52,4176 округлено до четырёх цифр. При этом последняя оставленная цифра увеличена на единицу, так как отброшенная часть составляет больше половины единицы последнего оставленного разряда, то есть больше 0,005 (число 52,42 ближе к 52,4176, чем число 52,41).

Таким же образом находим в таблице:

$$2{,}48^2 = 6{,}150 \quad \text{вместо} \quad 6{,}1504;$$
$$1{,}74^2 = 3{,}028 \quad \text{вместо} \quad 3{,}0276;$$
$$5{,}79^2 = 33{,}52 \quad \text{вместо} \quad 33{,}5241;$$
$$9{,}16^2 = 83{,}91 \quad \text{вместо} \quad 83{,}9056.$$

Для нахождения квадратов чисел, имеющих четыре цифры, в таблицах В. М. Брадиса справа помещены ещё 9 занумерованных столбцов — «поправок».

Пусть требуется найти квадрат числа 7,824. Находим по предыдущему квадрат числа 7,82. Он равен 61,15. Затем в той же строке в столбце «поправок» за номером 4 (последняя цифра заданного числа) находим число 6, которое и прибавляем к последней цифре числа 61,15.

Получаем:

$$7{,}824^2 \approx 61{,}21.$$

Ещё пример: найти $47{,}33^2$.

Найдём сначала $4{,}73^2$. По таблице находим: $4{,}73^2 \approx \approx 22{,}37$. В столбце «поправок» за номером 3 находим число 3, которое прибавляем к последней цифре числа 22,37. Получим: $4{,}733^2 \approx 22{,}40$. Значит, по правилу, приведённому на странице 188, будем иметь:

$$47{,}33^2 \approx 2240.$$

На практике обычно действия производят над приближёнными числами, руководствуясь правилами приближённых вычислений. Если, например, числовые данные получены измерением с двумя значащими цифрами, то и числа, взятые из таблиц, надо округлить до двух значащих цифр; третья цифра оставляется в качестве запасной, если с числами, взятыми из таблицы, производятся дальнейшие вычисления.

Пример 1. *Сторона квадрата равна (приближённо) 4,3 м. Вычислить его площадь S.*

Решение. Из таблиц В. М. Брадиса найдём: $4{,}3^2 = 18{,}49$. Так как сторона 4,3 дана с двумя значащими цифрами, то и число, взятое из таблицы, следует округлить, оставив в нём две значащие цифры. Итак,

$$S \approx 18 \text{ кв. м.}$$

Пример 2. *Радиус круга равен (приближённо) 4,3 м. Найти площадь S круга.*

Решение. Как известно, площадь круга выражается формулой $S = \pi R^2$, где R — радиус круга, а $\pi \approx 3{,}14$. Теперь берём $R^2 \approx 4{,}3^2 \approx 18{,}5$. Здесь значение R^2 взято из таблицы с округлением до трёх значащих цифр. Третья цифра взята как запасная, потому что над R^2 производятся дальнейшие вычисления. В окончательном результате надо сохранить две значащие цифры.

$$S = 3{,}14 \cdot 18{,}5 = 58{,}09 \approx 58 \text{ (кв. м.)}.$$

Полезно запомнить очень лёгкий способ приближённого возведения в квадрат чисел, близких к единице.

Обозначим число, немного большее единицы, через $1 + \alpha$. Тогда

$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2.$$

Но α^2 — очень малое число, которое мы можем отбросить. Получим легко запоминаемую формулу:

$$(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha.$$

Примеры.

$1{,}02^2 \approx 1{,}04$ (точный результат: 1,0404);

$1{,}04^2 \approx 1{,}08$ (» » 1,0816).

Мы видим, что, округлив до трёх цифр точные квадраты, получим как раз те же числа, которые получили устно по формуле.

Пользуясь этой же формулой, мы можем устно вычислить:

$$10{,}2^2 \approx 104;\ 10{,}4^2 \approx 108;\ 10{,}5^2 \approx 110;$$

$$102^2 \approx 10\,400;\ 103^2 \approx 10\,600;\ 104^2 \approx 10\,800.$$

Здесь мы применили правило о переносе запятой, приведённое в начале этого параграфа (стр. 188).

Можно вычислять в уме квадраты чисел, немного меньших единицы.

Обозначим точное число через $1 - \alpha$:

$$(1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2.$$

Отбрасывая малое число α^2, получим:

$$(1 - \alpha)^2 \approx 1 - 2\alpha.$$

П р и м е р ы.

$$0{,}98^2 = (1 - 0{,}02)^2 \approx 1 - 0{,}04 = 0{,}96;$$
$$0{,}97^2 \approx 1 - 0{,}06 = 0{,}94;$$
$$9{,}9^2 \approx 100 - 2 = 98.$$

Возведение чисел в квадрат на счётной линейке. Очень легко на линейке находить приближённое значение квадрата любого числа. Для этого на корпусе линейки имеется шкала квадратов A (черт. 52). Эта шкала состоит из двух частей, каждая из которых представляет собой основную шкалу D, но уменьшенную вдвое.

Если поставить визирную черту на любое число основной шкалы D, то на шкале квадратов A прочтём квадрат этого числа.

На чертеже 39 читаем: $2^2 = 4$.

Ниже приведено несколько примеров возведения чисел в квадрат и для сравнения даны квадраты этих же чисел, вычисленные по четырёхзначным таблицам.

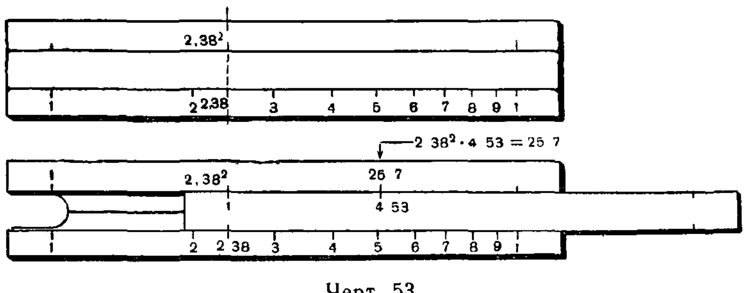
x	3	3,4	6,3	24,4	0,461
x^2 на линейке x^2 по таблице	9 9,000	11,6 11,56	39,7 39,69	595 595,4	0,213 0,2125

Так же как при умножении и делении на линейке, место запятой результата возведения в квадрат определяем грубой прикидкой. Читая $6{,}3^2$ как три — девять — семь, выясняем, что это не может быть *ни* 3,97, *ни* 397; значит, $6{,}3^2 = 39{,}7$.

С большой скоростью и простотой вычисляются на линейке комбинации из нескольких действий. Найдём значение $x = 4{,}53 \cdot 2{,}38^2$.

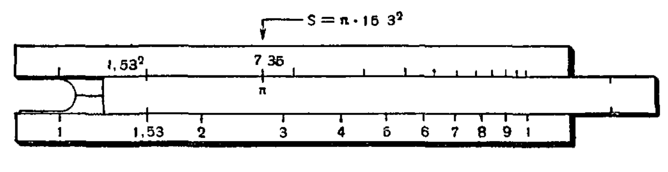
Черт. 52.

Ставим визир против 2,38 на основной шкале D. Тогда на шкале квадратов A визир покажет число $2{,}38^2$. Не читая этого числа и не трогая бегунка, переставим движок так, чтобы его начало 1 совпало с визирной чертой.



Черт. 53.

Теперь передвинем бегунок и против 4,53 на шкале B читаем на шкале A окончательный ответ 25,7. Для нахождения результата понадобилось только одно перемещение движка (черт. 53). Так же экономно вычислим площадь



Черт. 54.

круга, если радиус его $R = 15{,}3$ *см*. По формуле $S = \pi R^2$ найдём: $S = \pi \cdot 15{,}3^2 = 735$ *см*^{2}. (Число π на линейке имеет специальную метку) (черт. 54).

§ 91. Понятие об извлечении корня.

Решим две задачи.

Задача 1. *Сторона квадратного участка земли равна* 8 *м. Определить его площадь.*

Площадь S участка равна квадрату его стороны. Значит,

$$S = 8^2 = 64 \ (м^2).$$

Задача 2. *Площадь квадратного участка равна 81 м². Вычислить его сторону.*

Эта задача является обратной по отношению к первой. В первой задаче была известна длина стороны квадрата и требовалось найти его площадь; здесь, наоборот, известна площадь квадрата, требуется найти длину его стороны.

Обозначим неизвестную длину стороны квадрата через x метров. Тогда площадь квадрата будет равна x^2 *м²*. Но по условию эта площадь равна 81 *м²*. Получаем уравнение:

$$x^2 = 81.$$

Значит, чтобы решить задачу 2, надо найти число, квадрат которого был бы равен 81. Из таблицы квадратов найдём, что таким числом является 9. Действительно,

$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81.$$

Число 9 называется корнем второй степени или, короче, квадратным корнем из 81. Точно так же 7 является квадратным корнем из 49, так как $7^2 = 49$; число $\frac{2}{3}$ — квадратный корень из $\frac{4}{9}$, так как $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Определения. 1. **Квадратным корнем из числа** a **называется число, квадрат которого равен** a.

2. **Действие, посредством которого отыскивается квадратный корень, называется извлечением квадратного корня.**

Извлечение корня (квадратного) является действием, обратным возведению в квадрат: при возведении в квадрат известно число, требуется найти его квадрат; при извлечении квадратного корня известен квадрат числа, требуется найти само число.

Поэтому правильность извлечения квадратного корня можно проверить, возведя найденный корень в квадрат; если получится данное число, значит, корень найден верно.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 = a \qquad (1)$$

при различных значениях a.

1) Пусть $a<0$.

В этом случае уравнение (1) **не имеет решений.** Действительно, какое бы значение x мы ни взяли, квадрат его будет всегда неотрицательным числом (т. е. положительным числом или нулём) и, следовательно, не может равняться отрицательному числу a.

2) Пусть $a=0$.

Очевидно, что в этом случае уравнение (1) имеет единственное решение $x=0$.

Действительно, $0^2=0\cdot 0=0$, если же $x\neq 0$, то и $x^2\neq 0$.

3) Пусть $a>0$.

В этом случае, как мы уже видели на примере уравнения $x^2=81$, уравнение может иметь решение.

Из всего сказанного можно сделать вывод:

Для того чтобы из числа можно было извлечь квадратный корень, необходимо, чтобы оно было неотрицательным числом, то есть положительным числом или нулём.

§ 92. Арифметический корень.

Решая в § 91 уравнение $x^2=81$, мы нашли его положительный корень: $x=9$. Но легко установить, что и число -9 тоже является решением этого уравнения, так как $(-9)^2=(-9)\cdot(-9)=81$. Значит, число 81 имеет два квадратных корня: 9 и -9. Положительное число 9 называют арифметическим корнем из 81. Точно так же число 144 имеет два квадратных корня: 12 и -12. Положительное число 12 называют арифметическим корнем из 144. Вообще, если b является квадратным корнем из какого-либо положительного числа a, то и число, противоположное числу b, тоже является квадратным корнем из a. Действительно, если $b^2=a$, то и $(-b)^2=(-b)\cdot(-b)=b^2=a$. Один из корней является положительным, другой отрицательным числом.

Если $a=0$, то единственным числом, квадрат которого равен 0, есть $b=0$.

Определение. **Неотрицательный квадратный корень из неотрицательного числа называется арифметическим квадратным корнем из этого числа.**

Арифметический корень из числа a обозначается так: $\sqrt{a}$. Число a, из которого извлекают корень, называется подкоренным числом.

Примеры. $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$; $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$; $\sqrt{-25}$ не имеет смысла.

Нетрудно убедиться, что *арифметический корень из неотрицательного числа может иметь лишь единственное значение*. Поясним это примером. Имеем: $\sqrt{49}=7$, но никакое другое неотрицательное число, будучи возведено в квадрат, не может дать 49.

В самом деле, если взять любое число (неотрицательное), меньшее 7 (например, 6; 6,5; 6,7 и т. п.), то, возведя его в квадрат, получим число, меньшее 49.

Если же взять любое число, большее 7 (например, 8; 7,5; 7,9 и т. п.), то, возведя его в квадрат, получим число, большее 49, и лишь одно положительное число 7, возведённое в квадрат, даст 49.

Таким образом, из всего сказанного выше вытекает следующее:

1. *Для выражения $\sqrt{a}$ допустимыми значениями a могут быть лишь неотрицательные числа, то есть $a \geqslant 0$.*

2. *Само выражение $\sqrt{a}$ также может иметь лишь неотрицательные значения, то есть $\sqrt{a} \geqslant 0$.*

3. *Уравнение $x^2=a$* при $a>0$, *кроме решения $x=\sqrt{a}$, имеет ещё отрицательное решение $-\sqrt{a}$, значит, данное уравнение имеет два решения: $x=\pm\sqrt{a}$* (при $a=0$ получается одно решение: $x=0$).

Из неотрицательности арифметического корня следует, что равенство

$$\sqrt{a^2}=a$$

имеет место не всегда.

Это равенство будет верным лишь при условии, что $a \geqslant 0$. Если $a<0$, то верным будет такое равенство:

$$\sqrt{a^2}=-a.$$

Например, если $a=-5$, то будем иметь:

$$\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5).$$

Точно так же $\sqrt{(-4)^2}=4$, $\sqrt{(-11)^2}=11$ и т. п. Таким образом, правильно можно записать так:

$$\sqrt{a^2}=a \quad \text{при } a \geqslant 0;$$
$$\sqrt{a^2}=-a \text{ при } a<0.$$

Приняв во внимание, что абсолютная величина числа всегда положительна (или равна нулю), оба эти равенства можно объединить в одно:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Например: $\sqrt{(-10)^2}=|-10|=10$.

§ 93. Приближённый квадратный корень из положительного числа.

Задача. *Комната квадратной формы имеет площадь, равную 20 кв. м. Найти её длину и ширину.*

Так как комната квадратная, то её длина x равна её ширине. По условию задачи мы должны иметь:

$$x^2=20,$$

и нам требуется найти арифметический корень из числа 20.

Очевидно, что x не может быть целым числом, так как $4^2<20<5^2$, а между двумя соседними целыми числами 4 и 5 не содержится ни одного целого числа.

Наша задача имеет вполне определённый практический смысл, и её можно решить приближённо с требуемой точностью.

Покажем, как это можно сделать.

Мы указали два соседних целых числа 4 и 5 такие, что 4^2 меньше, а 5^2 больше, чем 20.

Число 4 называется приближённым квадратным корнем из 20 с точностью до 1 с недостатком, число 5 — приближённым корнем из 20 с точностью до 1 с избытком.

Рассмотрим теперь десятичные дроби, заключающиеся между 4 и 5 и имеющие целое число десятых долей:

4,1; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 4,6; 4,7; 4,8; 4,9.

Будем последовательно возводить эти дроби в квадрат, пока не получим числа, большего 20.

x	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
x^2	16,81	17,64	18,49	19,36	20,25

Итак, мы получили:

$$(4,4)^2 < 20 < (4,5)^2.$$

Числа 4,4 и 4,5 называются приближёнными значениями квадратного корня из 20 с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком (соответственно).

Если нам недостаточна полученная точность, то поступим так: будем выписывать десятичные дроби, заключённые между 4,4 и 4,5 и содержащие целое число сотых долей, а затем будем последовательно возводить эти дроби в квадрат, пока не получим числа, большего 20.

x	4,41	4,42	4,43	4,44	4,45	4,46	4,47	4,48
x^2	19,4481	19,5364	19,6249	19,7136	19,8025	19,8916	19,9809	20,0704

Числа 4,47 и 4,48 называются приближёнными значениями квадратного корня из 20 с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком.

Точно так же (если это нужно) можно получить приближённые значения $\sqrt{20}$ с точностью до 0,001; это будут числа 4,472 и 4,473, так как $(4,472)^2 = 19,998784$ и $(4,473)^2 = 20,007729$ и, значит,

$$(4,472)^2 < 20 < (4,473)^2.$$

Итак, наша задача получила решение с точностью до трёх значащих цифр; такая точность вполне достаточна во многих практических измерениях. Можно считать, что

$$x = 4,47.$$

Дадим теперь общее определение приближённого корня.

Приближёнными значениями квадратного корня из данного числа с точностью до единицы называются два последовательных натуральных числа, из которых квадрат первого меньше, а квадрат второго больше данного числа.

Первое из этих чисел называется приближённым значением корня с недостатком, второе — приближённым значением корня с избытком.

Записывают приближённые значения корня так:

$$\sqrt{10} \approx 3 \text{ (с нед.)}; \quad \sqrt{10} \approx 4 \text{ (с изб.)}.$$

Примеры.

$$\sqrt{134} \approx 11 \text{ (с нед.)}; \quad \sqrt{134} \approx 12 \text{ (с изб.)};$$

$$\sqrt{1000} \approx 31 \text{ (с нед.)}; \quad \sqrt{1000} \approx 32 \text{ (с изб.)}.$$

Вместо слов «приближённое значение квадратного корня» часто говорят просто «приближённый квадратный корень».

Чтобы найти приближённый корень с точностью до 1 с недостатком, надо найти наибольшее натуральное число, квадрат которого меньше подкоренного числа. Это можно сделать или путём испытаний, или пользуясь таблицами квадратов натуральных чисел.

Прибавив 1 к приближённому корню с недостатком, получим приближённый корень с избытком.

Определение. **Приближёнными квадратными корнями с недостатком и с избытком из числа с точностью до 0,1 называются такие два числа, отличающиеся друг от друга на 0,1, из которых квадрат одного меньше, а квадрат другого больше данного числа.**

Приближённые корни с точностью до 0,1 записывают в виде десятичных дробей с одним знаком после запятой. Прибавив 0,1 к приближённому корню с недостатком, получим приближённый квадратный корень с избытком.

Например, приближёнными корнями с точностью до 0,1 из 32 будут числа 5,6 и 5,7, так как

$$5{,}6^2 = 31{,}36; \quad 5{,}7^2 = 32{,}49.$$

Значит,

$$5{,}6^2 < 32 < 5{,}7^2.$$

Аналогично определяются приближённые корни с точностью до 0,01; 0,001 и т. д. из данного числа.

Пример. Числа 3,77 и 3,78 являются приближенными значениями $\sqrt{14,24}$ с точностью до 0,01.

Проверим это:

$$(3,77)^2 = 14,2129; \quad (3,78)^2 = 14,2884.$$

Значит,

$$(3,77)^2 < 14,24 < (3,78)^2.$$

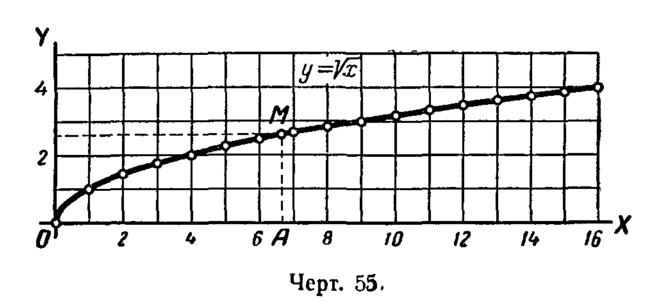
Итак, числа 3,77 и 3,78 отличаются друг от друга на 0,01; квадрат первого меньше, а квадрат второго больше, чем 14,24. Это и означает, что 3,77 и 3,78 суть приближённые корни из 14,24 с точностью до 0,01.

§ 94. График зависимости $y = \sqrt{x}$.

Построим график зависимости $y = \sqrt{x}$.

Составим, например, такую таблицу значений x и y, взяв приближённые корни с точностью до 0,01:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = \sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16



Черт. 55.

Построив по этой таблице точки на координатной плоскости и соединив их последовательно кривой линией, получим график, изображённый на чертеже 55.

С помощью аккуратно построенного графика можно находить приближённые значения квадратного корня, если не требуется большой точности.

Найдём по графику $\sqrt{6{,}7}$. На оси абсцисс найдём точку A с абсциссой 6,7 и через неё проведём перпендикуляр к этой оси, который пересечёт график в точке M. Ордината этой точки, равная приблизительно 2,6, и даст приближённое значение $\sqrt{6{,}7}$.

Так как, по определению арифметического корня, x и y не могут быть отрицательными числами, то график зависимости $y=\sqrt{x}$ расположен в I четверти координатной плоскости.

Приближённые формулы. Если в тождестве

$$\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 \pm \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \qquad (1)$$

число α мало по сравнению с единицей, то, отбросив член $\frac{\alpha^2}{4}$, получим по извлечении из обеих частей квадратного корня приближённые равенства:

$$\sqrt{1 \pm \alpha} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{2},$$

которые позволяют легко найти в уме приближённые корни из чисел, близких к единице.

Примеры

По формуле.	Более точные значения.
$\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015;$	$\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}01489;$
$\sqrt{1{,}04} \approx 1{,}02;$	$\sqrt{1{,}04} \approx 1{,}01980;$
$\sqrt{0{,}96} \approx 1 - 0{,}02 = 0{,}98;$	$\sqrt{0{,}96} \approx 0{,}97979;$
$\sqrt{0{,}97} \approx 1 - 0{,}015 = 0{,}985;$	$\sqrt{0{,}97} \approx 0{,}98489.$

Передвинув в подкоренном числе запятую на две цифры, а в полученном корне на одну цифру вправо, получим:

$\sqrt{105} \approx 10{,}25;$	$\sqrt{105} \approx 10{,}24695;$
$\sqrt{106} \approx 10{,}3;$	$\sqrt{106} \approx 10{,}29563;$
$\sqrt{98} \approx 10 - 0{,}1 = 9{,}9;$	$\sqrt{98} \approx 9{,}89949;$
$\sqrt{95} \approx 10 - 0{,}25 = 9{,}75;$	$\sqrt{95} \approx 9{,}74679.$

§ 95. Извлечение квадратного корня из целых чисел.

В настоящем параграфе мы выведем правило извлечения квадратного корня из целых чисел. В случае, если данное число не является квадратом целого числа, по этому правилу можно найти приближённый корень с недостатком с точностью до 1.

Извлечение корня из целого числа, меньшего 10 000, но большего 100. Пусть надо найти $\sqrt{4082}$. Так как это число меньше 10 000, то корень из него меньше 100. С другой стороны, данное число больше 100, значит корень из него больше 10. Но всякое число, которое больше 10 (или равно 10), но меньше 100, имеет две цифры, значит, искомый корень есть сумма:

$$\text{десятки} + \text{единицы},$$

и поэтому квадрат его должен равняться сумме:

$$(\text{десятки})^2 + 2 \cdot (\text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицы})^2.$$

Сумма эта должна быть наибольшим квадратом, заключающимся в 4082. Так как $(\text{десятки})^2$ составляют сотни, то квадрат десятков надо искать в сотнях данного числа. Сотен в данном числе 40 (мы находим их число, отделив запятой две цифры справа). Но в 40 заключается несколько целых квадратов: 36, 25, 16, ... и др. Возьмём из них наибольший: 36 и допустим, что квадрат десятков корня будет равен именно этому наибольшему квадрату. Тогда число десятков в корне должно быть 6. Проверим теперь, что всегда число десятков корня равно наибольшему целому корню из числа сотен подкоренного числа. Действительно, в нашем примере число десятков корня не может быть больше 6, так как $(7 \text{ дес.})^2 = 49$ сотням, что превосходит 4082. Но оно не может быть и меньше 6, так как 5 дес. (с единицами) меньше 6 дес., а между тем $(6 \text{ дес.})^2 = 36$ сотням, что меньше 4082. А так как мы ищем наибольший целый корень, то не следует брать для корня 5 дес., когда и 6 дес. оказывается мало. Итак, мы нашли число десятков корня, именно 6. Пишем эту цифру направо от знака равенства, запомнив, что она означает десятки корня. Возведя её в квадрат, получим 36 сотен. Вычитаем эти 36 сотен из 40 сотен подкоренного числа и к остатку приписываем число 82:

$$\begin{array}{l} \sqrt{40'82} = 6 \\ \underline{36} \\ \ 48'2 \end{array}$$

В числе 482 должна содержаться сумма:

$$2 \cdot (6 \text{ дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицы})^2.$$

Произведение $(6 \text{ дес.}) \cdot (\text{един.})$ должно составлять десятки, поэтому удвоенное произведение десятков на единицы надо искать в десятках остатка, то есть в 48 (мы получим число их, отделив в остатке 482 одну цифру справа). Удвоенные десятки корня

составляют 12. Значит, если 12 умножим на единицы корня (которые пока неизвестны), то мы должны получить число, содержащееся в 48. Поэтому разделим 48 на 12. Для этого влево от остатка проводим вертикальную черту и за ней (отступив от черты на одно место влево для цели, которая сейчас обнаружится) напишем удвоенную первую цифру корня, то есть 12, и на неё разделим 48.

В частном получим 4. Однако заранее нельзя ручаться, что цифру 4 можно принять за единицы корня, так как мы сейчас разделили на 12 всё число десятков остатка, тогда как некоторая часть из них может и не принадлежать удвоенному произведению десятков на единицы, а входить в состав квадрата единиц. Поэтому цифра 4 может оказаться велика. Надо её испытать. Она, очевидно, будет годиться в том случае, если сумма $2\cdot(6\text{ дес.})\cdot 4+4^2$ окажется не больше остатка 482. Сумму эту мы можем вычислить сразу таким простым приёмом: за вертикальной чертой к удвоенной цифре корня (к 12) приписываем справа цифру 4 (поэтому мы и отступили от черты на одно место) и на неё же умножим полученное число (124 на 4):

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{40'82}=6 \\
 & 36 \\
124 & 48'2 \\
4 & 49\ 6
\end{array}
$$

Действительно, проводя это умножение, мы умножаем 4 на 4, значит, находим квадрат единиц корня; затем мы умножаем 12 десятков на 4, значит, находим удвоенное произведение десятков корня на единицы. В результате получаем сразу сумму того и другого. Полученное произведение оказалось 496, что больше остатка 482, значит, цифра 4 велика. Тогда испытаем таким же образом следующую меньшую цифру, 3. Для этого сотрём цифру 4 и произведение 496, вместо цифры 4 поставим 3 и умножим 123 на 3:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{40'82}=63 \\
 & 36 \\
123 & 48\,2 \\
3 & 36\,9 \\
 & \overline{11}
\end{array}
$$

Произведение 369 оказалось меньше остатка 482; значит, цифра 3 годится (если бы случилось, что и эта цифра велика, тогда надо было бы испытать следующую меньшую цифру, 2). Напишем цифру 3 в корне направо от цифры десятков. Последний остаток 113 показывает избыток данного числа над наибольшим целым квадратом, заключающимся в нём. Для проверки возведём в квадрат 63 и к результату прибавим 113:

$$
\begin{array}{r}
63^2=3969 \\
+\ \ 113 \\
\hline
4082
\end{array}
$$

Так как в сумме получилось данное число 4082, то действие сделано верно.

Примеры.

1. $\sqrt{12'25} = 35$

```
    9
65 | 32'5
 5 | 32 5
   -----
       0
```

2. $\sqrt{86'55} = 93$

```
     81
183 |  55'5
  3 |  54 9
    ------
         6
```

3. $\sqrt{16'05} = 40$

```
   16
8 |  0'5
```

4. $\sqrt{8'72} = 29$

```
    4
49 | 47'2
 9 | 44 1
   -----
     31
```

5. $\sqrt{64'00} = 80$

```
64
---
 00
```

В четвёртом примере при делении 47 десятков остатка на 4 мы получаем в частном 11. Но так как цифра единиц корня не может быть двузначным числом 11 или 10, то надо испытать цифру 9.

В пятом примере после вычитания из первой грани квадрата 8 остаток оказывается равным 0 и следующая грань тоже состоит из нулей. Это показывает, что искомый корень состоит только из 8 десятков, и потому на место единиц надо поставить нуль.

Извлечение корня из целого числа, большего 10 000. Пусть требуется найти $\sqrt{35\,782}$. Так как подкоренное число превосходит 10 000, то корень из него больше $\sqrt{10\,000} = 100$ и, следовательно, он состоит из трёх цифр или более. Из скольких бы цифр он ни состоял, мы можем его всегда рассматривать как сумму только десятков и единиц. Если, например, корень оказался бы 482, то мы можем его считать за сумму 48 десятков $+$ 2 единицы. Тогда квадрат корня будет состоять по-прежнему из трёх слагаемых:

$$(\text{десятки})^2 + 2 \cdot (\text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицы})^2.$$

Теперь мы можем рассуждать совершенно так же, как и при нахождеиии $\sqrt{4082}$ (в предыдущем примере). Разница будет только та, что для нахождения десятков корня из 4082 мы должны были извлечь корень из 40, и это можно было сделать по таблице умножения; теперь же для получения десятков $\sqrt{357'82}$ нам придётся извлечь корень из 357, что по таблице умноженния выполнить нельзя. Но мы можем найти $\sqrt{357}$ тем приёмом, который был описан в предыдущем примере, так как число $357 < 10\,000$:

$\sqrt{3'5\,7'8\,2} = 189$

```
     1
 28 | 2 5'7
  8 | 2 2 4
    ---------
369 |   3 3 8'2
  9 |   3 3 2 1
    -----------
            6 1
```

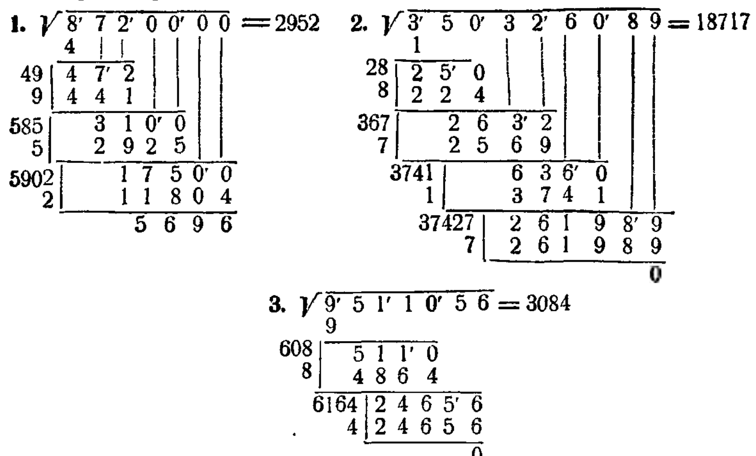
Наибольший целый корень из 357 равен 18. Значит, в $\sqrt{3'57'82}$ должно быть 18 десятков.

Чтобы найти единицы, надо из 3'57'82 вычесть квадрат 18 десятков, для чего достаточно вычесть квадрат 18 из 357 сотен и к остатку снести две последние цифры подкоренного числа. Остаток от вычитания квадрата 18 из 357 у нас уже есть: это 33. Значит, для получения остатка от вычитания квадрата 18 десятков из 3'57'82 достаточно к 33 приписать справа цифры 8 и 2.

Далее поступаем так, как мы поступали при нахождении $\sqrt{4082}$, а именно: слева от остатка 3382 проводим вертикальную черту и за нею пишем (отступив от черты на одно место) удвоенное число найденных десятков корня, то есть 36 (дважды 18). В остатке отделяем одну цифру справа и делим число десятков остатка, то есть 338, на 36. В частном получаем 9. Эту цифру испытываем, для чего её приписываем к 36 справа и на неё же умножаем. Произведение оказалось 3321, что меньше остатка. Значит, цифра 9 годится, пишем её в корне.

Вообще, чтобы извлечь квадратный корень из какого угодно целого числа, надо сначала извлечь корень из числа его сотен; если это число больше 100, то придётся искать корень из числа сотен этих сотен, то есть из десятков тысяч данного числа; если и это число больше 10 000, придётся извлекать корень из числа сотен десятков тысяч, то есть из миллионов данного числа, и т. д.

Примеры.



В последнем примере, найдя первую цифру и вычтя квадрат её, получаем в остатке 0. Сносим следующие две цифры, 5 и 1. Отделив десятки, мы получаем 5 десятков, тогда как найденная удвоенная цифра корня есть 6. Значит, от деления 5 на 6 мы получаем 0.

Ставим в корне 0 на втором месте и к остатку сносим следующие две цифры; получаем 5110. Далее продолжаем как обыкновенно.

Правило. *Чтобы извлечь квадратный корень из данного целого числа, разбивают его от правой руки к левой на грани, по две цифры в каждой, кроме первой (крайней левой), в которой может быть и одна цифра.*

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из первой грани.

Чтобы найти вторую цифру, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня, к остатку сносят вторую грань и число десятков получающегося числа делят на удвоенную первую цифру корня; полученное целое число подвергают испытанию.

Испытание это производится так: за вертикальной чертой (налево от остатка) пишут удвоенное ранее найденное число корня и к нему с правой стороны приписывают испытуемую цифру; получившееся после этой приписки число умножают на испытуемую цифру. Если после умножения получится число, большее остатка, то испытуемая цифра не годится и надо испытать следующую меньшую цифру.

Следующие цифры корня находят с помощью того же приёма.

Если после снесения грани число десятков получившегося числа окажется меньше делителя, то есть меньше удвоенной найденной части корня, то в корне ставят 0, сносят следующую грань и продолжают действие дальше.

§ 96. Извлечение корня с точностью до 0,1; 0,01 и т. д.

Пусть требуется найти $\sqrt{2{,}35104}$ с точностью до $\frac{1}{10}$ (с недостатком). Расположим вычисления так:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{2',35'\,10'\,4} = 1{,}5 \\ & \;\;1 \\ \hline 25 & \;\;13'5 \\ 5 & \;\;12\,5 \\ \hline & \;\;\;\;1\,0 \end{array}$$

Мы сначала находим приближённый корень с точностью до 1 только из целого числа 2. Получим 1 (и в остатке 1). Пишем в корне цифру 1 и ставим после неё запятую. Теперь находим цифру десятых. Для этого приписываем к остатку 1 цифры 3 и 5, стоящие направо от запятой, и продолжаем извлечение так, как будто мы извлекали корень из целого числа 235. Полученную цифру 5 пишем в корне на месте десятых. Остальные цифры подкоренного числа (104) нам не нужны. Что полученное число 1,5 будет действительно приближённым корнем с точностью до $\frac{1}{10}$, видно из следующего; если бы

мы находили наибольший целый корень из 235 с точностью до 1, то получили бы 15, значит,

$$15^2 \leqslant 235 < 16^2.$$

Разделив каждое из этих чисел на 100, получим:

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2{,}35 < \frac{16^2}{100},$$

или

$$1{,}5^2 \leqslant 2{,}35 < 1{,}6^2,$$

и, наконец,

$$1{,}5^2 < 2{,}35104 < 1{,}6^2 *.$$

Пусть требуется найти с точностью до $\frac{1}{100}$ приближённый $\sqrt{248}$ с недостатком. Найдём целое число, потом — цифру десятых, затем и цифру сотых. Корень из целого числа будет 15 целых. Чтобы получить цифру десятых, надо, как мы видели, приписать к остатку 23 ещё две цифры, стоящие направо от запятой:

```
      √2' 48', 0000 = 15,74
       1
 25 | 14' 8
  5 | 12 5
307 |  2 30' 0
  7 |  2 14 9
3144|    15 10' 0
   4|    12 57 6
          2 52 4
```

В нашем примере этих цифр нет вовсе; ставим на их место нули. Приписав их к остатку и продолжая действие так, как будто находим корень из целого числа 24 800, мы найдём цифру десятых 7. Остаётся найти цифру сотых. Для этого приписываем к остатку 151 ещё два нуля и продолжаем извлечение, как будто мы находим корень из целого числа 2 480 000. Получаем 15,74. Что это число действительно есть приближённый корень из 248 с точностью до $\frac{1}{100}$ с недостатком, видно из следующего. Если бы мы находили наибольший целый квадратный корень из целого числа 2 480 000, то получили бы 1574, значит,

$$1574^2 \leqslant 2\,480\,000 < 1575^2.$$

Разделив каждое из этих чисел на 10 000 (100^2), получим:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000 < \frac{1575^2}{100^2},$$

* От прибавления числа 0,00104 двойной знак $\leqslant$ должен измениться, очевидно, на знак $<$, а знак $>$ остаётся (так как $0{,}00104 < 0{,}01$).

или

$$15{,}74^2 \leqslant 248; \qquad 15{,}75^2 > 248.$$

Значит, 15,74 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближённым корнем с недостатком с точностью до $\frac{1}{100}$ из 248.

Правило. *Чтобы извлечь из данного целого числа или из данной десятичной дроби приближённый корень с недостатком с точностью до* $\frac{1}{10}$, *до* $\frac{1}{100}$, *до* $\frac{1}{1000}$ *и т. д., находят сначала приближённый корень с недостатком с точностью до* 1, *извлекая корень из целого числа (если его нет, пишут в корне* 0 *целых).*

Потом находят цифру десятых. Для этого к остатку приписывают две цифры подкоренного числа, стоящие направо от запятой (если их нет, приписывают к остатку два нуля), и продолжают извлечение так, как это делается при извлечении корня из целого числа. Полученную цифру пишут в корне на месте десятых.

Затем находят цифру сотых. Для этого к остатку приписывают снова две цифры, стоящие направо от тех, которые были только что снесены, и т. д.

Таким образом, при извлечении корня из целого числа с десятичной дробью *число надо делить на грани по две цифры в каждой, начиная от запятой, как влево (в целой части числа), так и вправо (в дробной части).*

Примеры.

1. Извлечь с точностью до $\frac{1}{100}$ корни: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{0{,}3}$.

а) $\sqrt{2} = 1{,}41$

```
      1
 24 | 10'0
  4 |  9 6
 281|  40'0
   1|  28'1
       11 9
```

б) $\sqrt{0{,}30} = 0{,}54$

```
       25
 104 |  5 00
   4 |  4 16
          84
```

2. Извлечь с точностью до $\frac{1}{10\,000}$: а) $\sqrt{0{,}38472}$; б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

а) $\sqrt{0{,}38'\,47'\,20} = 0{,}6202$

```
       36
  122 |  2 4' 7
    2 |  2 4  4
 12402|      3200'0
     2|      2480 4
              719 6
```

б) $\sqrt{\frac{3}{7}} \approx \sqrt{0{,}42'\,85'\,71'\,42}$

$\sqrt{0{,}42'\,8\,5'\,71'\,42} = 0{,}6546$

```
        36
  125 |  6 8'5
    5 |  6 2 5
  1304|    6 0 7' 1
     4|    5 2 1  6
 13086|      8 5 54' 2
     6|      7 8 51  6
               7 02  6
```

В последнем примере мы обратили дробь $\frac{3}{7}$ в десятичную, вычислив восемь десятичных знаков, чтобы образовались четыре грани, потребные для нахождения четырёх десятичных знаков корня.

§ 97. Квадратный корень из произведения, дроби и степени.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать арифметические квадратные корни.

В случае буквенного подкоренного выражения будем считать, что буквы, содержащиеся под знаком корня, обозначают неотрицательные числа.

1. Корень из произведения.

Рассмотрим такой пример.

$$\sqrt{2601}=51, \text{ так как } (51)^2=2601.$$

С другой стороны, заметим, что число 2601 есть произведение двух сомножителей, из которых корень извлекается легко:

$$2601=9\cdot289.$$

Извлечём квадратный корень из каждого сомножителя и перемножим эти корни:

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt{289}=3\cdot17=51.$$

Мы получили одинаковые результаты и тогда, когда извлекали корень из произведения, стоящего под корнем, и тогда, когда извлекали корень из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножали.

Во многих случаях вторым способом найти результат легче, так как приходится извлекать корень из меньших чисел.

Теорема 1. ***Чтобы извлечь квадратный корень из произведения, можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножить.***

Докажем теорему для трёх сомножителей, то есть докажем справедливость равенства:

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}. \qquad (1)$$

Доказательство проведём непосредственной проверкой, на основании определения арифметического корня. Допустим, что нам надо доказать равенство:

$$\sqrt{A}=B$$

(A и B — неотрицательные числа). По определению квадратного корня, это значит, что

$$B^2=A.$$

Поэтому достаточно возвести в квадрат правую часть доказываемого равенства и убедиться, что получится подкоренное выражение левой части.

Применим это рассуждение к доказательству равенства (1). Возведём в квадрат правую часть; но в правой части находится произведение, а чтобы возвести в квадрат произведение, достаточно возвести в квадрат каждый сомножитель и результаты перемножить (см. § 40):

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2=abc.$$

Получилось подкоренное выражение, стоящее в левой части. Значит, равенство (1) верно.

Мы доказали теорему для трёх сомножителей. Но рассуждения останутся теми же, если под корнем будет 4 и т. д. сомножителей. Теорема верна для любого числа сомножителей.

Пример.

$$\sqrt{4\cdot 9\cdot 25\cdot 36}=2\cdot 3\cdot 5\cdot 6=180.$$

Результат легко найден устно.

2. Корень из дроби. Вычислим $\sqrt{\frac{121}{144}}$.

$$\sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{11}{12}.$$

Проверка.

$$\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{11^2}{12^2}=\frac{121}{144}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}}=\frac{11}{12},$$

значит, $$\sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}}.$$

Докажем теорему.

Теорема 2. ***Чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь корень отдельно из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй.***

Требуется доказать справедливость равенства:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \qquad (2)$$

Для доказательства применим способ, которым была доказана предыдущая теорема.

Возведём правую часть в квадрат. Будем иметь:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}.$$

Получили подкоренное выражение, стоящее в левой части. Значит, равенство (2) верно.

Итак, мы доказали следующие тождества:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

и сформулировали соответствующие правила извлечения квадратного корня из произведения и частного. Иногда при выполнении преобразований приходится применять эти тождества, читая их «справа налево».

Переставив левую и правую части, перепишем доказанные тождества следующим образом:

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Чтобы перемножить корни, можно перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень.

Чтобы разделить корни, можно разделить подкоренные выражения и из частного извлечь корень.

3. Корень из степени. Вычислим $\sqrt{2^6}$.

$$\sqrt{2^6}=\sqrt{64}=8.$$

Но $$8=2^3=2^{\frac{6}{2}}.$$

Значит,

$$\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3.$$

Точно так же

$$\sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9 = 3^2 = 3^{\frac{4}{2}}.$$

В обоих примерах мы в результате получали основание подкоренного выражения в степени, равной частному от деления показателя степени на 2.

Докажем это положение в общем виде.

Теорема 3. ***Если m — чётное число, то***

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}. \quad (3)$$

Кратко говорят так: *чтобы извлечь квадратный корень из степени, достаточно разделить на 2 показатель степени* (не меняя основания).

Для доказательства применим тот способ проверки, которым были доказаны теоремы 1 и 2.

Так как m — чётное число (по условию), то $\frac{m}{2}$ — целое число. Возведём в квадрат правую часть равенства (3), для чего (см. § 40) умножим на 2 показатель степени, не меняя основания

$$\left(a^{\frac{m}{2}}\right)^2 = a^{\frac{m}{2} \cdot 2} = a^m.$$

Получили подкоренное выражение, стоящее в левой части. Значит, равенство (3) верно.

Пример. Вычислить $\sqrt{7^6}$.

На вычисление 7^6 пришлось бы потратить значительное время и труд. Теорема 3 позволяет найти результат устно.

$$\sqrt{7^6} = 7^3 = 343.$$

§ 98. Простейшие преобразования.

1. Вынесение множителей за знак квадратного корня.

Пусть дано выражение $\sqrt{162}$. Мы можем этот корень представить в более простом виде, применив к нему теорему об извлечении корня из произведения (§ 97):

$$\sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = \sqrt{81}\,\sqrt{2} = 9\sqrt{2}.$$

Точно так же

$$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2a} = a\sqrt{a};$$

$$\sqrt{81a^5b^7} = \sqrt{9^2a^4ab^6b} = \sqrt{9^2a^4b^6}\sqrt{ab} = 9a^2b^3\sqrt{ab}.$$

Такое преобразование называется **вынесением множителя** за знак корня.

В результате применения этого преобразования данное выражение упрощается и часто сокращаются требуемые вычисления. В этом можно убедиться на следующих примерах.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,01 выражение $\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108}$.

Вычислим каждый из корней с точностью до 0,01:

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108} \approx 6{,}93 + 5{,}20 - 10{,}39 = 1{,}74.$$

Нам пришлось извлечь квадратный корень из трёх чисел, и притом мы не можем быть уверены, что результат действительно даст величину выражения $\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108}$ с точностью до 0,01 (для уверенности в этом нужно было бы вычислить корни с точностью большей, чем заданная).

Попробуем упростить данное выражение, вынося за знак радикала те множители, которые возможно:

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108} = \sqrt{16\cdot 3} + \sqrt{9\cdot 3} - \sqrt{36\cdot 3} =$$
$$= 4\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{3} - 6\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Итак, после преобразования нам придётся извлечь квадратный корень только из одного числа.

Вычислив его с точностью до 0,01, найдём:

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108} = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Теперь видно, что в первом вычислении мы сделали ошибку на одну сотую, то есть получили результат не с заданной точностью.

Пример 2. Вычислить выражение $\sqrt{48x^7}$ при $x = 3$.

Подставив в данное выражение $x = 3$, получим:

$$\sqrt{48\cdot 3^7} = \sqrt{104\,976}.$$

Нам придётся извлечь корень из шестизначного числа. Мы значительно упростим вычисления, если предварительно вынесем за знак корня те множители, которые возможно. Будем иметь:

$$\sqrt{48x^7}=\sqrt{3\cdot 16\cdot x^6\cdot x}=4x^3\sqrt{3x}.$$

Подставив теперь $x=3$, легко найдём:

$$4\cdot 3^3\cdot\sqrt{3\cdot 3}=4\cdot 3^4=4\cdot 81=324.$$

Во всех предыдущих примерах подкоренное выражение мы разлагали на множители, выделяя такие, показатель которых делится на два, и извлекали из них корень. В дальнейшем надо приобрести навык сразу выносить нужные множители за знак корня, не прибегая к предварительному разложению на множители подкоренного выражения.

Пример 3.

$$\sqrt{5a^4b^7c^{13}}=a^2b^3c^6\sqrt{5bc}.$$

Как видно из примеров, *для вынесения множителей из-под знака квадратного корня достаточно показатель каждого множителя разделить на два и записать перед знаком корня этот множитель с показателем, равным полученному частному, а под знаком корня тот же множитель с показателем, равным полученному остатку.*

В предыдущем примере $4:2=2$ (ост. 0); $7:2=$ $=3$ (ост. 1); $13:2=6$ (ост. 1).

2. Внесение множителей под знак квадратного корня. Иногда бывает полезно, наоборот, подвести под знак корня множители, стоящие перед ним.

Пусть, например, требуется вычислить с точностью до 0,001 выражение $20\sqrt{7}$. Вычислив $\sqrt{7}$ с точностью до 0,001 и умножив результат на 20, получим:

$$20\sqrt{7}\approx 20\cdot 2{,}646=52{,}920.$$

Заранее можем сказать, что результат не соответствует заданной точности, так как, умножив приближённое число 2,646 на 20, мы увеличили в 20 раз и ошибку.

Чтобы получить бо́льшую точность, возьмём $\sqrt{7}$ с точностью до 0,0001. Получим:

$$20\sqrt{7} \approx 20 \cdot 2{,}6457 = 52{,}914.$$

Но мы не можем и теперь быть уверены, что достигли требуемой точности.

Произведём вычисление другим способом. Представим данное выражение в таком виде:

$$20\sqrt{7} = \sqrt{20^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{20^2 \cdot 7} = \sqrt{400 \cdot 7} = \sqrt{2800}.$$

Вычислив $\sqrt{2800}$ с точностью до 0,001, получим:

$$20\sqrt{7} = \sqrt{2800} \approx 52{,}915.$$

Такова действительная величина данного выражения, вычисленная с точностью до 0,001.

Рассмотренное преобразование называется внесением множителя под знак корня.

Приведённый пример показывает целесообразность в некоторых случаях такого преобразования.

Чтобы внести под знак квадратного корня стоящие перед ним множители, достаточно возвести эти множители в квадрат и подкоренное выражение умножить на полученный результат.

Примеры.

1. $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{18};$
2. $a^3\sqrt{5a} = \sqrt{5aa^6} = \sqrt{5a^7};$
3. $2x^2y^3\sqrt{3xy} = \sqrt{12x^5y^7}.$

В двух первых примерах сначала множитель, стоящий перед знаком корня, был подведён под знак корня, затем произведено умножение.

В третьем примере обе эти операции были выполнены сразу.

3. Приведение подкоренного выражения к целому виду. Если подкоренное выражение дробное, то часто бывает целесообразно привести его к целому виду, или, как говорят, освободить подкоренное выражение от знаменателя.

Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1.

$$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Чтобы из знаменателя подкоренного выражения можно было извлечь корень, умножим числитель и знаменатель этого выражения на a. Получим:

$$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}=a^2\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=a^2\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}}=\frac{a^2\sqrt{ab}}{a}=a\sqrt{ab}.$$

Пример 2.

$$6x^3y\sqrt{\frac{5a}{4x^8y}}.$$

Умножив числитель и знаменатель подкоренного выражения на xy, извлечём квадратный корень из знаменателя. По сокращении получим:

$$6x^3y\sqrt{\frac{5a}{4x^8y}}=3x\sqrt{5axy}.$$

Значит, *чтобы привести подкоренное выражение к целому виду, достаточно его числитель и знаменатель умножить на такое выражение, чтобы показатели всех сомножителей в знаменателе делились на два; после этого извлечь корень из знаменателя.*

Примечание. Во всех предыдущих примерах буквы обозначали неотрицательные числа; если это условие не выполнено, то надо поступать так, как пояснено на следующих примерах.

Пример 1.

$$\sqrt{a^2b}, \quad \text{где} \quad a<0,\ b>0;$$

вынести a за знак корня.

Мы знаем, что при $a<0$

$$\sqrt{a^2}=-a,$$

поэтому

$$\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}.$$

При любом a верно такое равенство:

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}.$$

Пример 2. Внести множитель x под знак корня $x\sqrt{3a}$, если $x<0$.

Если x — отрицательное число, то $x=-|x|$, где $|x|$ — положительное число; значит,

$$x\sqrt{3a}=-|x|\sqrt{3a}=-\sqrt{3a|x|^2}=-\sqrt{3ax^2},$$

так как $|x|^2=x^2$.

Так, в частности, $-3\sqrt{5}=-\sqrt{9\cdot 5}=-\sqrt{45}$.

§ 99. Извлечение квадратного корня по таблицам и при помощи счётной линейки.

Извлечение квадратиого корня по таблицам. В § 93 на примере извлечения квадратного корня из числа 20 мы показали, как можно вычислить приближённо $\sqrt{20}$ с необходимой степенью точности. Однако, даже для того чтобы найти искомый корень с точностью до 0,01, пришлось проделать много вычислений. Чтобы облегчить вычислительную работу, составлены специальные таблицы квадратных корней, в которых даны приближённые значения квадратных корней из чисел.

В таблицах В. М. Брадиса даны квадратные корни с точностью до 0,001 чисел от 1 до 10 с промежутком в 0,01 и чисел от 10 до 100 с промежутком в 0,1. Устройство и употребление таблицы такое же, как и таблицы квадратов.

Поясним на примерах, как следует пользоваться таблицами квадратных корней.

1) $\sqrt{6,7}$. В первом столбце находим число 6,7 и рядом с ним во втором столбце квадратный корень из него: 2,588 (по округлении получим 2,6).

2) $\sqrt{27,6}$. В первом столбце находим число 27; в этом же ряду в столбце под номером 6 находим: $\sqrt{27,6}\approx 5,254$ (по округлении получим: 5,25).

3) $\sqrt{56,34}$. По предыдущему находим: $\sqrt{56,3}\approx\approx 7,503$. В столбце «поправок» за № 4 находим число 3, которое прибавляем к последней цифре числа 7,503. Получаем: $\sqrt{56,34}\approx 7,506$.

4) $\sqrt{427}$. Подкоренное число можно записать так:

$$427 = 4{,}27 \cdot 100,$$

тогда

$$\sqrt{427} = \sqrt{4{,}27 \cdot 100} = 10\sqrt{4{,}27} \approx 10 \cdot 2{,}066 = 20{,}66$$

(или по округлении 20,7).

Чтобы получить подкоренное число 427, мы должны в числе 4,27, которое содержится в таблице, передвинуть запятую на два знака вправо, тогда в результате 2,066, взятом из таблицы, придётся перенести запятую в ту же сторону на один знак.

5) $\sqrt{0{,}2868}$. Находим $\sqrt{28{,}68} \approx 5{,}355$. Тогда $\sqrt{0{,}2868} \approx 0{,}5355$. Это нетрудно объяснить. Число 28,68, корень из которого находится по таблице, в 100 раз больше подкоренного числа.

Значит, правильный результат будет в 10 раз меньше результата, найденного из таблицы.

6) $\sqrt{39\,440} \approx 198{,}5 + 0{,}1 = 198{,}6$.

Поясним подробнее эту запись. Сначала находим $\sqrt{3{,}944} \approx 1{,}985$, затем к последнему знаку прибавляем поправку, равную 1, тогда $\sqrt{3{,}944} \approx 1{,}986$.

Увеличив результат в 100 раз, получим: $\sqrt{39\,440} \approx$ $\approx 198{,}6$.

7) Вычислить значение выражения $ab^2 + \sqrt{a} + 2{,}8$ при $a \approx 3{,}9$; $b \approx 1{,}4$.

Решение. Находим b^2 и $\sqrt{a}$ по таблицам:

$$b^2 \approx (1{,}4)^2 = 1{,}96; \quad \sqrt{a} \approx \sqrt{3{,}9} \approx 1{,}98$$

(третьи цифры оставлены как запасные).

Умножаем:

$$ab^2 \approx 3{,}9 \cdot 1{,}96 \approx 7{,}64.$$

Складываем:

$$7{,}64 + 1{,}98 + 2{,}8 \approx 12.$$

Примечание. Если два числа состоят из одних и тех же значащих цифр, то отсюда ещё не следует, что квадратные корни из этих чисел также состоят из одних и тех же значащих цифр.

Поясним это такими примерами:

$\sqrt{37} \approx 6,083$; $\sqrt{3,7} \approx 1,924$;

$\sqrt{0,37} = \sqrt{37 \cdot 0,01} \approx \approx 0,6083$; $\sqrt{370} = \sqrt{3,7 \cdot 100} \approx 19,24$;

$\sqrt{3700} = \sqrt{37 \cdot 100} \approx \approx 60,83$; $\sqrt{0,037} = \sqrt{3,7 \cdot 0,01} \approx \approx 0,1924$.

Извлечение квадратного корня на счётной линейке. Так как извлечение квадратного корня есть действие, обратное возведению чисел в квадрат, то для вычисления квадратного корня пользуемся теми же шкалами, что и при возведении в квадрат, то есть шкалой квадратов A и основной шкалой D.

Но действие извлечения квадратного корня производится в порядке, обратном действию возведения в квадрат. При возведении в квадрат мы основание отмечали визиром на шкале D и результат читали на шкале A. Здесь же, наоборот, *значение подкоренного числа отмечаем визирной чертой на шкале квадратов A и против визирной черты на основной шкале D читаем значение корня.* На чертеже 39 находим: $\sqrt{4} = 2$.

Если надо найти $\sqrt{40}$, то визирную черту ставим против 40 в правой половине шкалы квадратов и читаем ответ на основной шкале: 6,32.

Извлечение квадратного корня из любых чисел можно свести к одному из двух рассмотренных случаев.

В качестве примеров возьмём те числа, из которых мы на страницах 216—217 извлекали квадратный корень по таблицам:

1) $\sqrt{6,7} \approx 2,59$; 2) $\sqrt{27,6} \approx 5,25$;

3) $\sqrt{427} = \sqrt{4,27 \cdot 10^2} = 10 \cdot \sqrt{4,27} \approx 10 \cdot 2,07 = 20,7$;

4) $\sqrt{0,287} = \sqrt{\frac{28,7}{10^2}} \approx \frac{5,36}{10} = 0,536$;

5) $\sqrt{39440} \approx \sqrt{3,94 \cdot 10^4} \approx 1,98 \cdot 10^2 = 198$.

Теперь сформулируем правило извлечения квадратного корня:

1) *Подкоренное число представляем в виде однозначного или двузначного числа, умножив (или разделив) его на чётную степень десяти.*

2) *Если подкоренное число представлено в виде однозначного числа, его устанавливают визиром на левой половине квадратной шкалы А; если же оно представлено двузначным числом, то — на правой половине квадратной шкалы.*

3) *Результат отсчитывается по визиру на основной шкале.*

Существует другое правило, позволяющее определить, в какой половине шкалы квадратов следует установить подкоренное число при извлечении квадратного корня.

Подкоренное число разбивают на грани, по две цифры в каждой грани, влево от запятой, если число больше 1, и вправо от запятой, если число меньше 1.

Если первая слева грань (не считая граней, состоящих из одних нулей) содержит одну значащую цифру, то число устанавливается в левой половине шкалы квадратов, если же в этой грани две цифры, то — в правой половине.

Например: 1) $\sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94$; 2) $\sqrt{0{,}04'32} \approx 0{,}208$;
3) $\sqrt{15'37} \approx 39{,}2$; 4) $\sqrt{75{,}30} \approx 8{,}68$; 5) $\sqrt{0{,}00'02} \approx 0{,}0141$.

Пользуясь этим способом, легко установить значность числа и положение запятой, так как каждая грань подкоренного числа, стоящая слева от запятой, даёт у корня один знак до запятой, а каждая чисто нулевая грань справа от запятой (если подкоренное число меньше единицы) даёт у корня один нуль после запятой.

§ 100. Краткие исторические сведения.

Возведение в квадрат. Практические задачи (например, вычисление площади квадратного участка) уже в глубокой древности приводили к потребности находить квадраты чисел. Очевидно, эта потребность возникала настолько часто, что, так же как и в настоящее время, составлялись специальные таблицы квадратов натуральных чисел.

Особый интерес представляет таблица квадратов чисел от 1 до 60, найденная при раскопках в Вавилоне и составленная около четырёх тысяч лет назад.

Приведём выдержки из этой таблицы в современной записи:

$6^2 = 36$	$8^2 = 1;\ 4$	$11^2 = 2;\ 1$	$19^2 = 6;\ 1$
$7^2 = 49$	$9^2 = 1;\ 21$	$12^2 = 2;\ 24$	$58^2 = 56;\ 4.$

Эта запись становится понятной, если первые цифры, стоящие до точки с запятой, считать единицами второго разряда, содержащими 60 единиц первого разряда.

Действительно, тогда мы имеем:

$$8^2 = 1 \cdot 60 + 4; \qquad 9^2 = 1 \cdot 60 + 21; \qquad 11^2 = 2 \cdot 60 + 1 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, эта таблица является одним из свидетельств употребления в древнем Вавилоне шестидесятеричной системы счисления.

В более поздние времена эта система счисления перешла из Вавилона в другие страны. Она применялась главным образом в астрономических вычйслениях.

Извлечение корня. К извлечению квадратного корня также ещё в древние времена приводили задачи практического характера (например, выделение квадратного участка земли заданной площади, решение задач, приводящих к квадратным уравнениям).

Так, в китайской математической рукописи, написанной во II в. до нашей эры по ещё более древним источникам, уже имеется описание способа нахождения квадратных корней.

Умели извлекать квадратные корни из чисел и индийцы ещё в IV—V вв. нашей эры. Индийский математик XII в. Бхаскара отмечал, что положительное число имеет два квадратных корня — положительный и отрицательный и что нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа.

Извлечение квадратного корня (например, при решении квадратных уравнеиий) встречается и в сочинении знаменитого среднеазиатского математика аль-Хорезми.

Интересен способ, по которому древние вавилоняне находили приближённые квадратные корни ещё за две тысячи лет до нашей эры. В современной алгебраической записи этот способ может быть выражен формулой

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}. \tag{1}$$

Пример 1. Найти $\sqrt{28}$. Так как $28 = 5^2 + 3$, то получим по формуле (1):

$$\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5{,}3.$$

Так как $5{,}3^2 = 28{,}09$, то приближённый корень получен с достаточно большой точностью.

Пример 2. $\sqrt{130} = \sqrt{11^2 + 9} \approx 11 + \frac{9}{22} \approx 11{,}41.$

Проверка. $11{,}41^2 = 130{,}1881.$

Если правую часть равенства (1) возведём в квадрат, то получим:

$$\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Таким образом, квадрат найденного приближённого корня отличается от подкоренного числа на величину $\frac{b^2}{4a^2}$. Отсюда следует, что найденный по формуле (1) корень будет тем точнее, чем меньше число b по сравнению с a.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 101. Квадратные уравнения.

Уравнение, в котором левая часть — многочлен второй степени относительно неизвестного, а правая — нуль, называется уравнением второй степени или, короче, квадратным.

В нормальном виде квадратное уравнение записывается так:

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

где a — любое не равное нулю число, b и c — любые числа, а x — неизвестное.

Так, например, уравнения

$$x^2-x-1=0;\ 2x^2-3x+5=0;\ 0{,}21x^2+1{,}23x+0{,}7=0$$

являются квадратными.

Если коэффициент при x^2 отрицателен, то мы можем сделать его положительным, умножив обе части уравнения на -1. Например, умножив обе части уравнения $-3x^2+5x-6=0$ на -1, получим равносильное ему уравнение $3x^2-5x+6=0$. Поэтому в дальнейшем для простоты будем всегда предполагать, что $a>0$.

В частности, b или c, или оба вместе могут быть равны нулю. Тогда уравнение называется неполным квадратным уравнением. Значит, неполные квадратные уравнения могут быть таких видов:

1) $ax^2+bx=0$ (при $c=0$);
2) $ax^2+c=0$ (при $b=0$).

В частности, если во втором случае и $c=0$, то уравнение примет вид: $ax^2=0$.

Если в уравнении (1) $a=1$, то уравнение называется приведённым. Оно обычно записывается в таком виде:

$$x^2+px+q=0,$$

где p и q — любые числа.

Всякое уравнение вида (1) можно сделать приведённым; для этого достаточно все его члены разделить на a.

В дальнейшем для краткости будем называть в уравнении (1) a первым коэффициентом, b — вторым и c — свободным членом.

§ 102. Уравнение вида $ax^2+bx=0$.

Задача. *Длина прямоугольного участка в 5 раз больше его ширины. Когда ширину участка увеличили на 9 м, площадь его увеличилась в 4 раза. Найти первоначальные размеры участка.*

Решение. Обозначим через x метров первоначальную ширину участка. Тогда можно составить такую таблицу:

	Ширина	Длина	Площадь
Первоначальный участок	x	$5x$	$5x^2$
Расширенный участок	$x+9$	$5x$	$5x(x+9)$

По условию площадь расширенного участка в 4 раза больше площади первоначального. Значит, получаем уравнение:

$$4\cdot 5x^2=5x(x+9). \qquad (1)$$

Разделим обе части уравнения на 5 и приведём его к нормальному виду:

$$3x^2-9x=0,$$

или

$$x^2-3x=0. \qquad (2)$$

Получили неполное квадратное уравнение. Решим его. Вынеся x за скобки, получим:

$$x(x-3)=0.$$

Но произведение равно нулю в том, и только в том, случае, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Значит, должно быть: 1) либо $x=0$, 2) либо $x-3=0$, то есть $x=3$.

Итак, мы получили два корня уравнения: $x_1=0$; $x_2=3$.

Подстановкой в уравнение (1) убедимся, что оба они ему удовлетворяют. Но по смыслу задачи число x, выражающее ширину участка, не может быть нулём. Значит, остаётся одно решение: $x=3$.

Длину участка найдём, умножив ширину на 5:

$$3\cdot 5=15.$$

Задача имеет единственное решение: длина первоначального участка была равна 15 *м*, а ширина 3 *м*.

Решим теперь неполное квадратное уравнение

$$ax^2+bx=0 \qquad (3)$$

в общем виде. Вынеся x за скобки, получим:

$$x(ax+b)=0. \qquad (4)$$

И здесь, как и для уравнения (1), будем иметь два корня:

1) $x_1=0$;

2) $ax+b=0$, откуда $x_2=-\frac{b}{a}$.

В частности, если $b=0$, то получим: $x_2=0$, то есть уравнение (3), или, что то же, уравнение (4) имеет лишь один корень: $x=0$.

Действительно, если $b=0$, то уравнение (3) примет вид $ax^2=0$, где $a\neq 0$. Очевидно, что левая часть этого уравнения будет равна нулю только при $x=0$.

§ 103. Уравнение вида $ax^2+c=0$.

З а д а ч а. *Длина прямоугольного участка земли в 5 раз больше его ширины, а площадь равна 720 м². Вычислить длину и ширину участка.*

Решение. Обозначим ширину участка через x метров. Тогда длина его будет равна $5x$ метрам. Площадь равна $5x \cdot x = 5x^2$ ($м^2$).

По условию

$$5x^2 = 720.$$

Получили уравнение с одним неизвестным.

Решим его. Разделив обе части уравнения на 5, получим равносильное ему уравнение:

$$x^2 = 144,$$

из которого найдём:

$$x = \pm\sqrt{144} = \pm 12.$$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -12 \text{ и } x_2 = 12.$$

Но по условию задачи для неизвестного допустимыми являются только положительные значения. Значит, решением задачи будет только $x = 12$.

Ответ. Ширина участка равна 12 *м*, а длина равна $12 \cdot 5 = 60$ *м*.

Пусть вообще имеем уравнение, которое после перенесения всех членов в левую часть и приведения подобных будет иметь вид:

$$ax^2 + c = 0 \text{ (где } a \neq 0). \qquad (1)$$

Перенесём свободный член c в правую часть и разделим уравнение на a; тогда получим уравнение

$$x^2 = -\frac{c}{a}, \qquad (2)$$

равносильное данному.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1. Пусть a и c — числа одинакового знака (то есть либо оба положительны, либо оба отрицательны); тогда $\frac{c}{a}$ есть положительное число, а $-\frac{c}{a}$ отрицательное число. Но мы знаем, что $x^2 \geqslant 0$, а потому не может равняться отрицательному числу; в этом случае уравнение (2), а значит, и данное, равносильное ему уравнение (1), не имеют решений.

Так, например, уравнение $2x^2+3=0$ не имеет решений.

Это и понятно: левая его часть — положительное число при всех значениях x, а потому не может равняться нулю.

Случай 2. Пусть $c=0$. Тогда уравнение (2) примет вид: $x^2=0$. Очевидно, что это равенство будет верным только при $x=0$. Значит, при $c=0$ уравнение (1), равносильное (2), имеет единственное решение $x=0$.

Случай 3. Числа a и c имеют противоположные знаки (одно из них положительно, а другое отрицательно). Тогда число $\frac{c}{a}$ отрицательно, а противоположное ему число $-\frac{c}{a}$ положительно.

В этом случае уравнение

$$x^2=-\frac{c}{a},$$

равносильное данному, имеет два корня:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Следовательно, и уравнение (1) имеет два корня:

$$x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Примеры: 1) $9x^2-4=0$; $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$.
2) $x^2-1,69=0$; $x_{1,2}=\pm 1,3$.

Вычислить $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ мы всегда можем приближённо с той степенью точности, какая нам требуется.

Пример.

$$x^2-5=0 \text{ и, значит, } x=\pm\sqrt{5}.$$

Следовательно, мы можем записать (см. таблицу В. М. Брадиса) $x\approx\pm 2,2$ (с двумя значащими цифрами); $x\approx\pm 2,24$ (с тремя значащими цифрами); $x\approx\pm 2,236$ (с четырьмя значащими цифрами).

§ 104. Приведённое квадратное уравнение.

Задача. *Одна сторона прямоугольника на 6 см меньше другой. Площадь его равна 40 см². Вычислить стороны прямоугольника.*

Решение. Пусть бо́льшая сторона равна x *см.*

Тогда вторая сторона равна $(x-6)$ *см*, а площадь прямоугольника равна $x(x-6)$ *см*².

По условию

$$x(x-6)=40.$$

Приведём это уравнение к нормальному виду:

$$x^2-6x-40=0.$$

Получили приведённое квадратное уравнение. Чтобы решить его, выделим в левой части квадрат двучлена. Замечая, что

$$x^2-6x=x^2-2\cdot 3\cdot x,$$

дополним это выражение до полного квадрата. Прибавив к этому выражению 3^2, получим квадрат двучлена $x-3$. Поэтому прибавим 9 к левой части уравнения $x^2-6x-40=0$ и вычтем то же число. Получим:

$$x^2-6x+9-9-40=0,$$

или

$$(x-3)^2-49=0.$$

Из последнего уравнения найдём:

$$x-3=\pm 7, \text{ или } x=3\pm 7.$$

Отсюда получим два корня уравнения:

$$x_1=-4, \quad x_2=10.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению. Но по смыслу задачи для x допустимыми являются только положительные значения (и притом бо́льшие шести). Следовательно, задача имеет единственное решение: бо́льшая сторона прямоугольника равна 10 *см*, а меньшая $10-6=4$ *см.*

Решим приведённое квадратное уравнение в общем виде

Пусть дано уравнение:

$$x^2+px+q=0. \qquad (1)$$

Чтобы решить его, поступим так же, как и в приведённом выше примере.

Так как $p=2\cdot\frac{p}{2}$, то, если прибавим и вычтем в левой части уравнения (1) одно и то же число $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$, получим:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q. \qquad (2)$$

Левая часть уравнения (2) неотрицательна, а относительно выражения $\frac{p^2}{4}-q$ представится три случая.

Случай 1.

$$\frac{p^2}{4}-q>0.$$

Из уравнения (2) находим:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

и

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (A)$$

Мы получили два корня:

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Итак, в этом случае уравнение (1) имеет два корня.

Формула (A) является общей формулой корней приведённого квадратного уравнения. Словами её можно выразить так:

Корни приведённого квадратного уравнения равны половине второго коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена.

Запомнив формулу (A), мы можем найти корни приведённого квадратного уравнения, не производя преобразований (рассмотренных на стр. 227 и 228), а просто подставив в формулу (A) данные значения p и q.

Примеры.

1. $x^2-7x+10=0$.

Здесь $p=-7$, $q=10$. Вычислим сначала подкоренное выражение в формуле (A):

$$\frac{p^2}{4}-q=\frac{49}{4}-10=\frac{9}{4}>0.$$

Уравнение имеет два решения.

Подставив в формулу (A) значения p и q, получим:

$$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}.$$

Отсюда имеем: $x_1=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$; $x_2=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$.

Подстановкой убедимся, что корни найдены верно.

2. $x^2+x-3=0$.

Здесь $p=1$, $q=-3$, $\frac{p^2}{4}-q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}>0$.

Подставив в формулу (A) значения p и q, получим:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{13}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{13})$$

Корни уравнения можно найти приближённо. Положив, например,

$\sqrt{13}\approx3{,}6$, найдём: $x_1\approx-\frac{4{,}6}{2}=-2{,}3$; $x_2\approx1{,}3$.

Проверим, например, корень x_1:

$$(-2{,}3)^2-2{,}3-3=5{,}29-2{,}3-3=-0{,}01.$$

Мы получили результат, близкий к нулю. Если взять корень с большей точностью, то при проверке получим результат, более близкий к нулю.

Случай 2.

$$\frac{p^2}{4}-q=0.$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Отсюда

$$x+\frac{p}{2}=0; \quad x=-\frac{p}{2}.$$

Итак, в этом случае уравнение имеет один корень.

Пример.

$$x^2-8x+16=0.$$

$$p=-8; \quad q=16; \quad \left(-\frac{8}{2}\right)^2-16=0.$$

Левая часть является квадратом двучлена. Имеем:

$$(x-4)^2=0; \quad x-4=0; \quad x=4.$$

Случай 3.

$$\frac{p^2}{4}-q<0.$$

Возьмём уравнение (2):

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Правая часть этого уравнения — отрицательное число. Левая же часть ни при каком значении x отрицательной быть не может. Следовательно, в этом случае уравнение (1) не имеет корней.

Пример.

$$x^2-6x+13=0.$$

Здесь $\frac{p^2}{4}-q=9-13=-4<0$, и уравнение не имеет корней.

Действительно, представив уравнение в виде

$$(x-3)^2+4=0, \text{ или } (x-3)^2=-4,$$

замечаем, что левая часть ни при каком значении x не может стать отрицательной. Следовательно, уравнение не имеет корней.

§ 105. Квадратное уравнение общего вида.

Решим уравнение:

$$4x^2-5x-21=0.$$

Разделив все его члены на 4, получим:

$$x^2-\frac{5}{4}x-\frac{21}{4}=0.$$

Но это уравнение — приведённое, и решать его мы уже умеем.

Применим формулу (A) предыдущего параграфа:

$$x=\frac{5}{8}\pm\sqrt{\frac{25}{64}+\frac{21}{4}}.$$

Произведём вычисления:

$$\frac{25}{64}+\frac{21}{4}=\frac{25+21\cdot 16}{64}=\frac{361}{64};\quad \sqrt{\frac{361}{64}}=\frac{19}{8}.$$

Итак, имеем:

$$x=\frac{5}{8}\pm\frac{19}{8}.$$

Отсюда

$$x_1=-\frac{7}{4};\quad x_2=3.$$

Таким же путём решим теперь квадратное уравнение в общем виде:

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Разделим обе части этого уравнения на a (мы знаем, что $a\neq 0$). Получим приведённое уравнение, равносильное данному:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \qquad \text{где } p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Вычислим подкоренное выражение в формуле (A) корней приведённого квадратного уравнения (2):

$$\frac{p^2}{4}-q=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (3)$$

Если это выражение неотрицательно, то, применив формулу (A), получим корни уравнения (1):

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Заметив, что $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$*, получим окончательно следующую общую формулу корней квадратного уравнения:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (B)$$

Если выражение (3) отрицательно, то уравнение не имеет корней.

Словами формулу (B) можно выразить так:

Корни квадратного уравнения равны дроби, знаменатель которой равен удвоенному первому коэффициенту, а числитель — второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этого коэффициента без учетверённого произведения первого коэффициента и свободного члена.

Примеры.

1. $x^2-7x+12=0$.

Здесь $a=1$, $b=-7$, $c=12$. Применяя формулу (B), получим:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2};\quad x_1=3;\quad x_2=4.$$

2. $3x^2-5x-2=0$.

Здесь $a=3$, $b=-5$, $c=-2$. По формуле (B) получим:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot(-2)}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm7}{6};$$

$$x_1=-\frac{1}{3};\quad x_2=2.$$

Формула (B) применима и в том случае, когда один из коэффициентов b или c равен нулю.

3. $9x^2-49=0$.

Здесь $a=9$, $b=0$, $c=-49$. По формуле (B) получим:

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0+4\cdot9\cdot49}}{2\cdot9}=\pm\frac{\sqrt{4\cdot9\cdot49}}{18}=\pm\frac{2\cdot3\cdot7}{18}=\pm\frac{7}{3}.$$

---

*Так как мы считаем, что $a>0$ (стр. 222), то $\sqrt{4a^2}=2a$.

4 $2x^2+5x=0$.

Здесь $a=2$, $b=5$, $c=0$.

Формула (B) даёт:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot0}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm5}{2\cdot2};\quad x_1=-\frac{5}{2};\ x_2=0.$$

Если $b=2k$, то уравнение (1) запишется так:

$$ax^2+2kx+c=0,$$

и формула (B) примет вид:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=$$
$$=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Следовательно,

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}. \qquad (C)$$

Этой формулой удобно пользоваться, если b — чётное число.

Пример. $5x^2-14x+8=0$.

Так как коэффициент при x — чётное число, то применяем формулу (C):

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-5\cdot8}}{5}=\frac{7\pm3}{5};$$
$$x_1=\frac{4}{5};\quad x_2=2.$$

Решим дробное уравнение:

$$\frac{x}{x-2}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x-3}.$$

Умножим обе части уравнения на $(x-2)(x-3)$. Получим:

$$x(x-3)+2=3(x-2),\ \text{или}\ x^2-6x+8=0.$$

Получили квадратное уравнение. Так как $(-3)^2-8=1>0$, то оно имеет два корня. Решив его по формуле (A), найдём:

$$x_1=2;\ x_2=4.$$

Теперь проверим корни, так как возможно появление посторонних корней (см. § 70).

Для данного уравнения значение $x=2$ не является допустимым, а поэтому уравнение имеет единственный корень $x=4$.

§ 106. Дискриминант.

В предыдущем параграфе было установлено, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни, если

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} \geqslant 0.$$

Но знаменатель $4a^2$ всегда положителен ($a \neq 0$). Значит, знак левой части в неравенстве зависит от знака выражения b^2-4ac.

Выражение b^2-4ac называется **дискриминантом** (различителем) уравнения. Обозначим его через D.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Формулу (B) корней квадратного уравнения можно записать короче:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, число корней квадратного уравнения зависит от значения D. Именно:

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D=0$, то уравнение имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D<0$, то уравнение не имеет корней.

Примеры.

1. $3x^2-2x+7=0$.

Вычислим дискриминант:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -80 < 0.$$

Уравнение не имеет корней.

2. $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$$D = 12^2 - 4\cdot 9\cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Уравнение имеет один корень: $x = \frac{12}{2\cdot 9} = \frac{2}{3}$.

3. $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

$$D = 12^2 - 4\cdot 4\cdot 7 = 144 - 112 = 32 > 0.$$

Применяя формулу (С), получим:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 7}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Последняя формула позволяет вычислить корни приближённо. Так, полагая $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, получим:

$$x_1 \approx \frac{3 - 1{,}41}{2} \approx 0{,}79; \quad x_2 \approx \frac{3 + 1{,}41}{2} \approx 2{,}21.$$

§ 107. Графическое решение квадратного уравнения.

Рассмотрим приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0;$$

перепишем его так:

$$x^2 = -px - q. \qquad (1)$$

Построим графики зависимостей:

$$y = x^2 \text{ и } y = -px - q.$$

График первой зависимости нам известен, это есть парабола (см. § 89); вторая зависимость — линейная; её график есть прямая линия. Из уравнения (1) видно, что в том случае, когда число x является его решением, ординаты точек обоих графиков равны между собой. Значит, данному значению x соответствует одна и та же точка как на параболе, так и на прямой, то есть парабола и прямая пересекаются в точке с абсциссой x.

Отсюда следующий графический способ решения квадратного уравнения: чертим параболу $y = x^2$ (эта парабола для всех приведённых уравнений одна и та же, и её достаточно начертить один раз или сделать лекало), чертим (например, по двум точкам) прямую $y = -px - q$.

Если прямая и парабола пересекаются, то абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения. Этот способ удобен, если не требуется большой точности.

Примеры.

1. Решим уравнение:

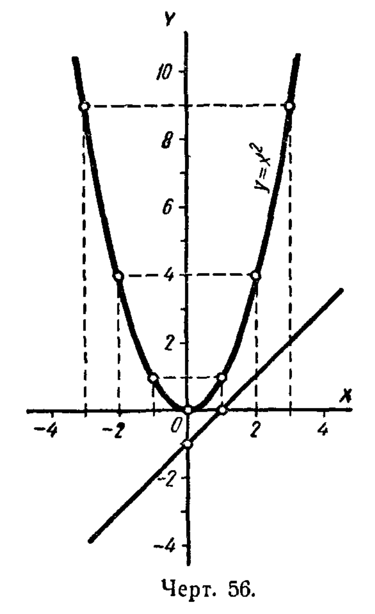
$$4x^2 - 12x + 7 = 0.$$

Представим его в виде

$$x^2 = 3x - \frac{7}{4}.$$

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x - \frac{7}{4}$.

Для построения прямой можно взять, например, точки $\left(0; -\frac{7}{4}\right)$ и $\left(2; \frac{17}{4}\right)$. Парабола и прямая пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1 \approx 0{,}8$ и $x_2 \approx 2{,}2$.



Черт. 56.

2. $x^2 - x + 1 = 0.$

Запишем уравнение в виде

$$x^2 = x - 1.$$

Построив параболу $y = x^2$ и прямую $y = x - 1$, увидим, что они не пересекаются (черт. 56). Значит, уравнение не имеет корней.

Проверим это. Вычислим дискриминант:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = -3 < 0,$$

а поэтому уравнение не имеет корней.

Пример 3.

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Если аккуратно начертим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x - 1$, то увидим, что они имеют одну общую точку (прямая касается параболы), $x = 1$, $y = 1$; уравнение имеет один корень $x = 1$ (проверить это вычислением).

§ 108. Решение задач, приводящих к квадратиым уравнениям.

Квадратные уравнения применяются при решении многих задач. Значительная часть задач, легко решаемых при помощи уравнений первой степени, может быть решена и чисто арифметически, хотя иногда гораздо более трудным, длинным и часто искусственным путём. Задачи же, приводящие к квадратным уравнениям, как правило, совсем не поддаются арифметическому решению. А к таким задачам приводят многочисленные и самые разнообразные вопросы физики, механики, гидромеханики, аэродинамики и многих других прикладных наук.

Основные этапы составления квадратных уравнений по условиям задачи те же, что и при решении задач, приводящих к уравнениям первой степени. Приведём примеры.

Задача. 1. *Две машинистки перепечатали рукопись за* 6 *час.* 40 *мин. Во сколько времени могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая одна, если первая затратила бы на эту работу на* 3 *часа больше второй?*

Решение. Пусть вторая машинистка затратит на перепечатку рукописи x часов. Значит, первая машинистка затратит на эту же работу $(x+3)$ часов.

Узнаем, какую часть всей работы выполняет за один час каждая машинистка и какую — обе вместе.

Первая машинистка выполняет за час $\frac{1}{x+3}$ часть.

Вторая » » » » $\frac{1}{x}$ часть.

Обе машинистки выполняют » » $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$ часть.

Отсюда имеем:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6\frac{2}{3}},$$

или

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}.$$

По смыслу задачи x — положительное число $(x>0)$.

Умножим обе части уравнения на $20x(x+3)$. После упрощения получим квадратное уравнение:

$$3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Так как $D = 31^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-60) = 1681 > 0$, то уравнение имеет два корня. По формуле (B) найдём:

$$x_1 = -\frac{5}{3}; \qquad x_2 = 12.$$

Но так как должно быть $x > 0$, то значение $x = -\frac{5}{3}$ не является допустимым для данной задачи.

Далее, значение $x = 12$ необходимо проверить по условию задачи и только после этого записать ответ.

Ответ. Первая машинистка затратит на работу $12 + 3 = 15$ часов, вторая 12 часов.

Задача 2. *Собственная скорость самолёта v км в час. Расстояние в l км самолёт пролетел дважды: сначала по ветру, затем против ветра, причём на второй перелёт он затратил на t часов больше. Вычислить скорость ветра.*

Ход решения изобразим в виде схемы.

Скорость ветра x *км* в час.

	Путь	Скорость	Время
По ветру	l	$v+x$	$\frac{l}{v+x}$
Против ветра . . .	l	$v-x$	$\frac{l}{v-x}$

По условию . . . $\frac{l}{v-x} - \frac{l}{v+x} = t.$

Умножим обе части уравнения на $(v-x)(v+x)$. После упрощения получим квадратное уравнение.

$$tx^2 + 2lx - tv^2 = 0.$$

Решив его ($t \neq 0$), найдём:

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + t^2v^2}}{t}.$$

Из полученной формулы заключаем:

1) Уравнение всегда имеет решение, так как подкоренное выражение всегда положительно.

2) Задача имеет единственное решение; второй корень отбрасываем, как отрицательный, так как по смыслу задачи $x>0$.

§ 109. Теорема Виета.

Решим приведённое уравнение:

$$x^2-7x+12=0.$$

По формуле (B) получим:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 12}}{2}.$$

Отсюда $x_1=3$; $x_2=4$.

Обратим внимание на следующее: если сложить найденные корни, то получим число, противоположное коэффициенту при x. Действительно: в уравнении $p=-7$, а $x_1+x_2=4+3=7$.

Если найденные корни перемножить, то получим число, равное свободному члену уравнения. Действительно, свободный член равен 12.

Возьмём ещё уравнение:

$$x^2+2x-35=0.$$

Его корни

$$x_1=-7;\ x_2=5.$$

Опять имеем:

$$x_1+x_2=5+(-7)=-2\ (p=2);$$
$$x_1\cdot x_2=5\cdot(-7)=-35\ \ (q=-35).$$

Докажем, что корни любого приведённого уравнения обладают этим свойством.

Теорема. ***Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:***

$$x_1+x_2=-p;\ x_1\cdot x_2=q.$$

Доказательство. Пусть имеем уравнение:

$$x^2+px+q=0.$$

Если уравнение имеет решения, то они соответственно равны (§ 104):

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Отсюда получим:

$$1)\ x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -p.$$

Итак, $x_1 + x_2 = -p$.

$$2)\ x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) =$$

$$= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Итак,

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Теорема доказана.

Эта теорема называется **теоремой Виета**, по имени французского математика Ф. Виета (1540 — 1603).

Полное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Заменим данное уравнение равносильным ему приведённым, разделив обе его части на a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тогда по теореме Виета будем иметь:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Если дискриминант квадратного уравнения $D = 0$, то уравнение имеет один корень и, следовательно, теорема Виета в этом случае не применима.

Но введём следующее условие: будем считать, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ и в случае, когда $D = 0$, тоже имеет два корня, но равных.

Каждый корень равен $-\frac{p}{2}$.

Эти два корня мы получим из формул:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Положив в них $\frac{p^2}{4} - q = 0$, получим $x_1 = -\frac{p}{2}$; $x_2 = -\frac{p}{2}$. При введённом условии теорема Виета остаётся верной и в случае, когда $D = 0$. Действительно,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} = q.$$

Таким образом, теорема Виета верна для любого квадратного уравнения, имеющего корни.

Пример.

$$x^2 - 10x + 25 = 0.$$

Имеем:

$$x_1 = x_2 = 5; \quad x_1 + x_2 = 10; \quad x_1 \cdot x_2 = 25.$$

Теорема (обратная). ***Если сумма двух чисел равна p, а их произведение равно q, то эти числа являются корнями квадратного уравнения***

$$\boldsymbol{x^2 - px + q = 0.} \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть дано, что

$$a + b = p; \quad ab = q. \qquad (2)$$

Докажем, что тогда числа a и b являются корнями уравнения.

Пользуясь равенствами (2), мы можем уравнение (1) переписать так:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0. \qquad (3)$$

Докажем, например, что a удовлетворяет этому уравнению, а следовательно, и уравнению (1).

Подставив a вместо x в уравнение (3), получим:

$$a^2 - (a + b)a + ab = a^2 - a^2 - ab + ab = 0.$$

Левая часть оказалась равной нулю. Значит, a — корень уравнений (3) и (1).

На основании этой теоремы легко решаются следующие задачи.

Задача 1. *Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы данные числа.*

Пусть m и n — данные числа. На основании теоремы, обратной теореме Виета, m и n являются корнями уравнения:

$$x^2-(m+n)x+mn=0.$$

Пусть, например, $m=3$; $n=-5$.
Тогда

$$m+n=-2;\quad mn=-15.$$

Искомое уравнение:

$$x^2+2x-15=0.$$

Задача 2. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b. \end{cases}$$

На основании той же теоремы заключаем, что x и y являются корнями уравнения:

$$z^2-az+b=0.$$

Решив его (если $a^2-4b\geqslant 0$), найдём два значения (различных или равных) z_1 и z_2. Тогда, положив

$$x=z_1,\ y=z_2,\ \text{и}\ x=z_2,\ y=z_1,$$

получим два (или одно) решения системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} x+y=4; \\ xy=-21. \end{cases}$$

Здесь $4^2-4(-21)=100>0$. Уравнение $z^2-4z-21=0$ имеет корни: $z_1=-3$, $z_2=7$; система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1=-3; \\ y_1=7; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=7; \\ y_2=-3. \end{cases}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} x+y=10; \\ xy=25. \end{cases}$$

Здесь $10^2-4\cdot25=0$. Система имеет одно решение:

$$\begin{cases} x=5; \\ y=5. \end{cases}$$

Пример 3.

$$\begin{cases} x+y=7; \\ xy=15. \end{cases}$$

Здесь $7^2-4\cdot15=-11<0$. Система не имеет решений.

§ 110. Исследование корней квадратного уравнения.

Пусть дано или составлено при решении задачи квадратное уравнение. Часто бывает полезно для решения этого уравнения получить некоторые сведения о его корнях, или, как говорят, исследовать корни уравнения.

1. **Исследование корней квадратного уравнения по дискриминанту.** Прежде всего нужно установить, сто́ит ли решать данное уравнение, то есть имеет ли оно корни. Из § 106 известно, что ответ на этот вопрос зависит от дискриминанта $D=b^2-4ac$, а именно:

Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня.

Если $D=0$, то уравнение имеет два равных корня.

Если $D<0$, то уравнение не имеет корней.

Примеры всех трёх случаев приводились в предыдущих параграфах.

2. **Исследование корней приведённого квадратного уравнения по его коэффициентам.** Пусть дано уравнение:

$$x^2+px+q=0 \quad (p\neq0 \text{ и } q\neq0).$$

Тогда, рассматривая коэффициенты этого уравнения, можно получить ещё некоторые сведения относительно его корней, не решая самого уравнения.

Рассмотрим различные случаи.

1) Пусть $q<0$. Тогда прежде всего заключаем, что уравнение имеет корни. В самом деле, в этом случае всегда

$$\frac{p^2}{4}-q>0, \text{ так как } \frac{p^2}{4}\geqslant0 \text{ и } -q>0.$$

Итак, мы пришли к важному выводу: если в приведённом квадратном уравнении свободный член отрицателен, то уравнение имеет корни.

Далее, по теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -p, \tag{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 = q. \tag{2}$$

Из условия $q < 0$ заключаем, что произведение корней $x_1 \cdot x_2$ отрицательно, а это означает, что корни имеют противоположные знаки: один из них положителен, другой отрицателен.

Пример 1.

$$x^2 - 11x - 26 = 0.$$

$p = -26 < 0$, значит, уравнение имеет корни, и они имеют противоположные знаки.

Решив уравнение, найдём его корни:

$$x_1 = 13; \quad x_2 = -2.$$

2) Пусть $q > 0$. Тогда из (2) заключаем, что если уравнение имеет корни, то есть если $D \geqslant 0$, то произведение их $x_1 x_2$ положительно, а это означает, что корни имеют одинаковые знаки.

Поставим вопрос: какие именно? Ответ получим из соотношения (1).

а) Пусть $p > 0$. Тогда сумма $x_1 + x_2$ отрицательна, и, значит, оба корня отрицательны.

б) Пусть $p < 0$. Тогда сумма $x_1 + x_2$ положительна, и, значит, оба корня положительны.

Пример 2.

$$x^2 - 10x + 22 = 0$$

$D = 10^2 - 4 \cdot 22 = 12 > 0$. Уравнение имеет корни, и они имеют одинаковые знаки, так как $x_1 \cdot x_2 = 22 > 0$.

Сумма корней равна 10. Значит, оба они положительны. Решив уравнение, найдём: $x_1 = 5 + \sqrt{3}$; $x_2 = 5 - \sqrt{3}$.

Возьмём $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, тогда $x_1 \approx 6{,}73 > 0$ и $x_2 \approx 3{,}27 > 0$.

3. Исследование корней уравнения общего вида. Перейдём к уравнению вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Разделив обе части этого уравнения на a, получим равносильное ему уравнение, но уже приведённое:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Здесь $p=\frac{b}{a}$; $q=\frac{c}{a}$.

Но так как по условию $a>0$, то знаки чисел p и q совпадают соответственно со знаками b и c.

А отсюда следует, что все выводы, которые были сделаны выше для приведённого уравнения, остаются в силе и для уравнения общего вида. Во всех выводах нужно только буквы p и q заменить буквами b и c.

Пример 3.

$$3x^2+10x+2=0.$$

Так как $D=10^2-4\cdot3\cdot2=76>0$, то уравнение имеет два различных корня; $c=2>0$, а поэтому корни имеют одинаковые знаки; $-b=-10<0$, значит, оба корня отрицательны.

§ 111. Разложение квадратного трёхчлена на множители.

1. Квадратный трёхчлен и его корни. Многочлен второй степени относительно какой-либо буквы называется иначе *квадратным трёхчленом* или трёхчленом второй степени относительно этой буквы.

Общий вид квадратного трёхчлена:

$$ax^2+bx+c, \qquad (1)$$

где коэффициенты a, b и c являются некоторыми определёнными числами, причём $a\neq0$ (заметим, что теперь a может быть и отрицательным), а x может принимать различные значения. В зависимости от значения x трёхчлен может принимать различные значения. Букву x будем называть главной буквой или аргументом.

Пример. Обозначим через y трёхчлен.

$$y=x^2-3x+2. \qquad (2)$$

Будем давать x произвольные значения. Соответствующие значения трёхчлена x^2-3x+2, или, что то же самое, значения y, даны в следующей таблице:

x	-1	0	1	2	3
y	6	2	0	0	2

Из этой таблицы видим, что при $x=1$ и при $x=2$ значение трёхчлена становится равным нулю.

Определение. **Те значения аргумента, при которых значение трёхчлена равно нулю, называются корнями этого трёхчлена.**

Так, 1 и 2 являются корнями трёхчлена (2).

Чтобы найти корни трёхчлена (1), *надо вычислить те значения x, при которых он обращается в нуль, то есть те значения x, при которых*

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (3)$$

Значит, корни трёхчлена (1) мы найдём, решив уравнение (3). Но мы знаем, что это уравнение в зависимости от величины его дискриминанта b^2-4ac может иметь два (различных или равных) корня либо не иметь корней.

Значит, то же можно сказать и о трёхчлене (1). Он а) имеет два корня (различных или равных), если $b^2-4ac \geqslant 0$, б) не имеет корней, если $b^2-4ac<0$.

Дискриминант уравнения (3) называется также дискриминантом и трёхчлена (1).

2. Разложение на множители трёхчлена вида

$$x^2+px+q.$$

Допустим, что трёхчлен

$$y=x^2+px+q$$

имеет два корня: x_1 и x_2. Тогда числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Но по теореме Виета будем иметь:

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1\cdot x_2=q.$$

Значит,

$$p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

Подставим значения p и q в данный трёхчлен и преобразуем полученное выражение:

$$y = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 \cdot x_2 =$$
$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Итак, мы получили:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Таким образом, *если трёхчлен вида* $y = x^2 + px + q$ *имеет корни, то он может быть представлен в виде произведения двух сомножителей: один из них является разностью между аргументом и одним корнем, другой — разностью между аргументом и другим корнем.*

Пример.

$$y = x^2 - 6x + 8.$$

Решив уравнение

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

найдём корни трёхчлена: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Тогда

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).$$

3. Разложение трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Возьмём теперь трёхчлен (1)

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где $a \neq 0$. Пусть корни уравнения (3)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

будут x_1 и x_2.

Вынеся в данном трёхчлене a за скобки, мы получим:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right). \qquad (4)$$

Но так как x_1 и x_2 — корни уравнения (3), или, что то же, уравнения (приведённого) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, то по предыдущему:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2).$$

Подстановка в (4) даёт:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Трёхчлен $ax^2 + bx + c$, имеющий корни, можно представить в виде произведения трёх сомножителей: один равен коэффициенту при x^2, а два других — разности между аргументом и корнями трёхчлена:

Пример 1.

$$y = 3x^2 + 5x + 2;$$
$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0.$$

Уравнение

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

имеет два корня:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$3x^2 + 5x + 2 = 3(x + 1)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Полученное произведение можно представить в более удобном виде: перемножив сомножители 3 и $\left(x + \frac{2}{3}\right)$, получим:

$$3x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(3x + 2).$$

Пример 2.

$$y = -6x^2 + 17x - 5.$$
$$D = 17^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-5) = 289 - 120 = 169 > 0.$$

Уравнение

$$-6x^2 + 17x - 5 = 0,$$

или, что то же, $6x^2 - 17x + 5 = 0$, имеет корни:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{2}.$$

Тогда

$$-6x^2 + 17x - 5 = -6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right),$$

или

$$y = -6x^2 + 17x - 5 = -(2x - 5)(3x - 1).$$

§ 112. Системы двух уравнений, из которых одно второй и одно первой степени.

З а д а ч а. *Прямоугольный участок площадью* 1000 $м^2$ *огорожен забором длиной* 130 *м. Вычислить длину и ширину участка.*

Р е ш е н и е. Пусть длина участка равна x метрам, ширина y метрам. Тогда площадь его будет равна xy $м^2$. По условию эта площадь равна 1000 $м^2$. Получаем уравнение:

$$xy = 1000. \quad (1)$$

Мы получили уравнение, содержащее произведение неизвестных xy. Степенью одночлена, содержащего две буквы, считается сумма показателей степеней, с которыми эти буквы входят в одночлен. Так, одночлен $2x^2y^3$ имеет степень $2+3=5$ относительно букв x и y.

Значит, в полученном уравнении (1) член xy имеет вторую степень, и мы получили уравнение второй степени.

Кроме того, в задаче дана величина периметра участка. Так как периметр его равен $2x+2y$, то получаем второе уравнение:

$$2x+2y=130,$$

или (разделив все члены на 2)

$$x+y=65. \quad (2)$$

Это уравнение первой степени.

Итак, для решения задачи мы имеем систему уравнений, из которых одно второй и одно первой степени:

$$\begin{cases} xy = 1000; \\ x+y=65. \end{cases} \quad (3)$$

Решим её способом подстановки. Выразим из второго уравнения y через x:

$$y=65-x. \quad (4)$$

Сделав подстановку в первое уравнение, получим:

$$x(65-x)=1000. \quad (5)$$

Система уравнений (4) и (5) и система (3) равносильны (§ 79).

Решив уравнение (5), найдём: $x_1 = 40$, $x_2 = 25$.

Отсюда подстановкой в (4) получим соответственно:

$$y_1 = 65 - 40 = 25; \quad y_2 = 65 - 25 = 40.$$

Получили два решения:

1) длина участка 40 *м*, ширина 25 *м*;

2) длина 25 *м*, ширина 40 *м*. Очевидно, что фактически получен один ответ на вопрос задачи.

Решим в общем виде систему уравнений, из которых одно второй и одно первой степени.

Пусть имеем систему:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0; \\ mx + ny + p = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Найдём из второго уравнения y:

$$y = -\frac{mx + p}{n}. \qquad (7)$$

Сделав подстановку в первое уравнение, получим:

$$ax^2 - bx\frac{mx + p}{n} + c\left(-\frac{mx + p}{n}\right)^2 +$$
$$+ dx - e\frac{mx + p}{n} + f = 0. \qquad (8)$$

Система уравнений (7) и (8) равносильна системе (6).

Но уравнение (8) является уравнением с одним неизвестным и не выше второй степени. Решив его, найдём значения x; подставив их в (7), найдём соответствующие значения y.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 2x - 2y - 17 = 0; \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Из второго уравнения находим:

$$y = 2x - 3. \qquad (10)$$

Подставив вместо y в первое уравнение $2x - 3$, получим:

$$4x^2 - (2x - 3)^2 + 2x - 2(2x - 3) - 17 = 0.$$

Это уравнение по упрощении примет вид:

$$x-2=0.$$

Отсюда

$$x=2.$$

Подстановка в уравнение (10) даёт:

$$y=1.$$

§ 113. Краткие исторические сведения.

Квадратные уравнения и способы их решения были известны в глубокой древности. Так, ещё за две тысячи лет до нашей эры задачи измерения земельных участков приводили древних вавилонян к решению квадратных уравнений.

В древней Греции (Пифагор, Евклид) квадратные уравнения решались геометрическим способом.

Знаменитый узбекский математик аль-Хорезми решал квадратные уравнения как алгебраическим, так и геометрическим способами.

Так как *общая формула решения квадратных уравнений* тогда ещё не была выведена, то аль-Хорезми приводит решения шести различных видов квадратных уравнений, например:

1. Один квадрат равен корням ($x^2=ax$).
2. Один квадрат и корни равны числу ($x^2+ax=b$).
3. Один квадрат и число равны корням ($x^2+a=bx$)

и т. д.

Приведём примеры решений аль-Хорезми обоими способами.

$$x^2+21=10x.$$

1. Раздели число корней пополам: $10:2=5$.
2. Умножь это число само на себя: $5\cdot 5=25$.
3. Вычти из него число: $25-21=4$.
4. Извлеки квадратный корень: $\sqrt{4}=2$.
5. Этот корень прибавь к половине корней или вычти из неё: $5+2=7$; $5-2=3$.

Если записать все приведённые действия одной формулой, то получим:

$$x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21.}$$

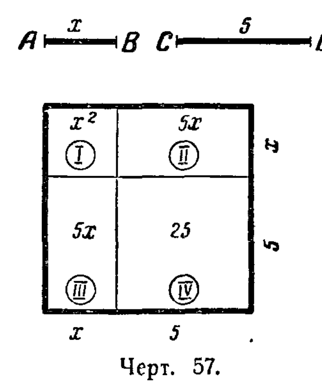
Как видим, решение аль-Хорезми полностью совпадает с современным решением по формуле.

Приведём пример геометрического решения.

$$x^2+10x=39.$$

Пусть отрезок $AB = x$ (черт. 57), а отрезок $CD = 5$.

Строим квадрат со стороной, равной $AB + CD$, то есть равной $x + 5$, и разбиваем его на четыре участка, как показано на чертеже.



Черт. 57.

Площадь квадрата равна $(x+5)^2$. С другой стороны, площадь участков I, II и III равна по условию 39, площадь IV равна 25. Значит, площадь всего квадрата равна $39 + 25 = 64$. Отсюда имеем:

$$(x+5)^2 = 64, \quad x + 5 = 8, \quad x = 3.$$

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, имеются в старинных китайских и индийских математических трактатах.

Приведём задачу из сочинения индийского математика Бхаскары.

Стая обезьян забавлялась; квадрат одной восьмой части их резвился в лесу; остальные двенадцать кричали на вершине холма. Скажи мне: сколько было всех обезьян?

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

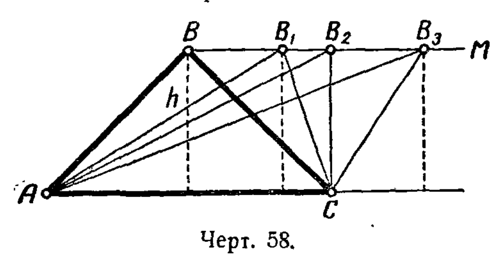
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ.

§ 114. Переменные величины.

Если надувать детский воздушный шар, то будут увеличиваться его поверхность и объём, будет уменьшаться толщина его оболочки; вес же этой оболочки остаётся неизменным.

Если наблюдать движение поезда от одной станции к другой, то также легко заметить, что некоторые величины, участвующие в движении поезда, изменяются, например: расстояние поезда от станции, запасы топлива и воды. Другие величины остаются неизменными, например: число вагонов, колёс и пр.

То же можно наблюдать и в других процессах. Одни величины в течение данного процесса сохраняют одно и то же значение; такие величины называются *постоянными*. Другие принимают различные значения; такие величины называются *переменными*.



Черт. 58.

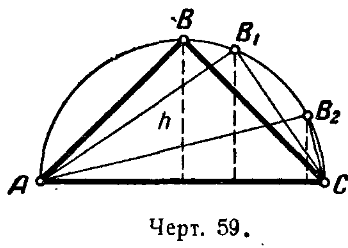
1. Пусть дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC (черт. 58). Через вершину B прямого угла проведём вправо прямую BM, параллельную гипотенузе AC. Будем перемещать вершину B по прямой BM.

Треугольник будет последовательно занимать положения AB_1C, AB_2C, ...

Какие элементы треугольника будут при этом оставаться постоянными и какие будут принимать различные значения?

Легко проследить, что будут сохранять неизменной свою величину: основание AC; высота h, опущенная из вершины B; площадь треугольника (так как она равна $\frac{AC \cdot h}{2}$).

Напротив, будут изменять свою величину: боковые стороны AB и BC; угол при вершине B; углы при основании AC.



Черт. 59.

Следовательно, в рассматриваемых условиях первые три величины являются постоянными, а пять последних — переменными.

2. Около того же прямоугольного треугольника ABC опишем окружность (гипотенуза AC будет диаметром этой окружности). Будем теперь перемещать вершину B по окружности в направлении к вершине C (черт. 59). Легко убедимся, что при этом остаются неизменными по величине: основание AC; угол B (как вписанный, опирающийся на диаметр и, следовательно, равный 90°).

Напротив, переменными величинами являются: высота h, опущенная из вершины B; площадь треугольника (так как изменяется высота при неизменном основании); боковые стороны AB и BC; углы A и C при основании.

Обычно входящие в формулу постоянные величины обозначаются первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d ..., а переменные — последними: x, y, z, ... Конечно, это условие не является обязательным и соблюдается не всегда.

§ 115. Понятие о функциональной зависимости.

Несколько учеников покупают в магазине одинаковые тетради. Одна тетрадь стоит 2 коп. Если один уче-

ник купит 3 тетради, а другой 5, то и плата их за покупку будет различна; первый заплатит 6 коп., второй — 10 коп. Мы здесь имеем дело с тремя величинами: ценой тетради, числом купленных тетрадей и стоимостью всей покупки. Из этих трёх величин первая (цена одной тетради) является постоянной, а две остальные — переменными, они принимают различные значения.

При этом каждому значению одной величины — числу купленных тетрадей — соответствует определённое значение другой — стоимости всех купленных тетрадей. Это соответствие видно из следующей таблицы:

Число тетрадей..	1	2	3	4	5	6	7
Стоимость в копейках........	2	4	6	8	10	12	14

Определение. **Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определённое значение другой, то говорят, что между этими переменными существует функциональная зависимость.**

Значит, между числом купленных тетрадей и их стоимостью существует функциональная зависимость.

Приведём ещё примеры величин, находящихся друг с другом в функциональной зависимости.

1. Время движения и путь, пройденный за это время.
2. Рост человека и его возраст.
3. Вес тела и его расстояние от центра Земли.
4. Время суток и температура воздуха.
5. Площадь посева и размер снятого урожая.

§ 116. Аргумент и функция.

Вернёмся снова к покупке тетрадей, о которой говорилось в § 115. Мы видели, что в этом процессе участвуют две переменные величины: число купленных тетрадей и их стоимость. Но легко видеть, что эти две величины играют в процессе покупки неодинаковую роль.

Количество тетрадей устанавливает сам ученик; эта величина может принимать произвольные значения: 3;

5; 8 и т. д. (Конечно, эти значения должны быть допустимыми; нельзя купить $\frac{5}{2}$ или -3 тетради.)

Значение же другой переменной величины — стоимости покупки — будет уже зависеть от значения первой — от числа купленных тетрадей.

Точно так же, если мы будем произвольно изменять длину стороны квадрата, то уже в зависимости от этого будет изменяться и его площадь.

Определение 1. **Если две переменные находятся в функциональной зависимости, то та из них, которая может принимать произвольные (допустимые) значения, называется независимой переменной или аргументом.**

Другая переменная, значения которой зависят от значений аргумента, называется зависимой переменной или функцией этого аргумента.

Значит, сумма денег, уплаченная за тетради, является функцией их количества.

Площадь квадрата — функция длины его стороны.

В § 111, рассматривая трёхчлен ax^2+bx+c, мы назвали букву x аргументом. Теперь это название понятно. Как было указано, мы давали букве x произвольные числовые значения, а значение трёхчлена зависело от этих значений x. Если задать вопрос, какие же именно произвольные значения может принимать аргумент, то ответ будет различен в зависимости от особенностей рассматриваемого процесса.

Так, длина стороны квадрата может принимать любые положительные значения. Количество купленных тетрадей может выражаться только натуральным числом.

Определение 2. **Множество всех (допустимых) значений аргумента называется областью определения функции.**

Говорят также, что функция определена на данном множестве значений аргумента.

Таким образом, площадь квадрата — функция, которая определена на множестве положительных чисел. Стоимость купленных тетрадей — функция, которая определена на множестве натуральных чисел.

Во многих случаях (однако не всегда), если существует функциональная зависимость между двумя переменными, то каждая из них по тем или иным мотивам может быть принята за аргумент, а другая будет функцией этого аргумента.

Рассмотрим снова пример с покупкой тетрадей.

Пусть у одного ученика было 4 коп., а у другого 8 коп., у третьего 10 коп. и т. д. Поставим вопрос: сколько каждый из них может купить тетрадей, если одна тетрадь стоит 2 коп.? Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от величины суммы, имеющейся у ученика. Здесь количество купленных тетрадей является уже функцией суммы денег, что можно изобразить таблицей:

Сумма денег	4	6	8	10	12
Количество тетрадей	2	3	4	5	6

Точно так же двояко можно рассматривать зависимость между длиной стороны квадрата и его площадью.

В приведённом выше примере длина стороны являлась аргументом, а площадь — его функцией.

Пусть требуется отмерить квадратные участки земли различной площади. Тогда длина стороны квадрата зависит от заданной площади. Площадь будет аргументом, а длина стороны — её функцией.

§ 117. Способы задания функции.

Из предыдущего параграфа следует, что основным признаком функциональной зависимости между двумя переменными величинами является наличие соответствия между значениями этих величин: каждому (допустимому) значению одной из них соответствует вполне определённое значение другой.

Как только такое соответствие установлено, то говорят, что *задана* функция.

Это соответствие может быть установлено различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

1. Табличный способ. Всего проще установить соответствие между значениями двух переменных так: указать значения аргумента и для каждого из них указать соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называется табличным.

Вообще, всякие таблицы, как например таблицы квадратов чисел, квадратных корней, таблицы синусов и др., являются не чем иным, как табличным заданием функции. Так, в таблице синусов аргументом является угол, а функцией — его синус. Каждому данному в таблице значению угла соответствует в той же таблице определённое значение его синуса.

2. Графический способ. Табличное задание функции неудобно тем, что даёт значения функции только для тех значений аргумента, которые приведены в таблице.

Если надо иметь значения функции для любых значений аргумента (в тех или иных границах) и если при этом не требуется для значений функции большой точности, то в этих случаях часто применяется графический способ. Он основан на следующем: для каждого значения аргумента на плоскости строится точка, абсцисса которой равна данному значению аргумента, а ордината — соответствующему значению функции.

При всевозможных изменениях абсциссы (то есть аргумента) соответствующие точки на плоскости образуют некоторую линию, которая называется графиком данной функции. Дав аргументу определённое значение, восставляем в соответствующей точке оси абсцисс перпендикуляр к ней. Ордината точки пересечения с графиком и даёт соответствующее значение функции.

Пример. В § 89 был дан график зависимости $y=x^2$. Здесь любое данное число является значением аргумента, а соответствующая ордината является значением функции этого аргумента, именно его квадратом.

Из сказанного видно, что если задана некоторая функция, то можно построить её график; графиком можно пользоваться для нахождения приближённых значений функции. В практике нередко функция задаётся готовым, начерченным графиком. Так, например, в совре-

менном производстве широко применяются самопишущие приборы, которые автоматически вычерчивают графики изменения тех или иных величин (температуры, давления и т. п.).

3. Аналитический способ. Функция может быть задана формулой, показывающей, как по данному значению аргумента вычислить соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называется **аналитическим**.

Пример. Функция $y=x^2$ задана формулой, показывающей, как для каждого значения аргумента x вычислить соответствующее значение функции.

Возможны и другие способы задания функции.

Выше было сказано, что переменные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита — x, y, z, ... При этом обычно аргумент обозначают буквой x, а функцию — буквой y. Такое обозначение связано с тем, что при графическом изображении функциональной зависимости значения аргумента отсчитываются по оси абсцисс (оси «иксов»), а соответствующие значения функции — по оси ординат (оси «игреков»). Выше это показано на примере графика функции $y=x^2$.

§ 118. Функция $y=kx$.

В § 73 было дано определение прямо пропорциональной зависимости между двумя величинами. Она выражалась равенством:

$$y=kx, \tag{1}$$

где k — число, не равное нулю.

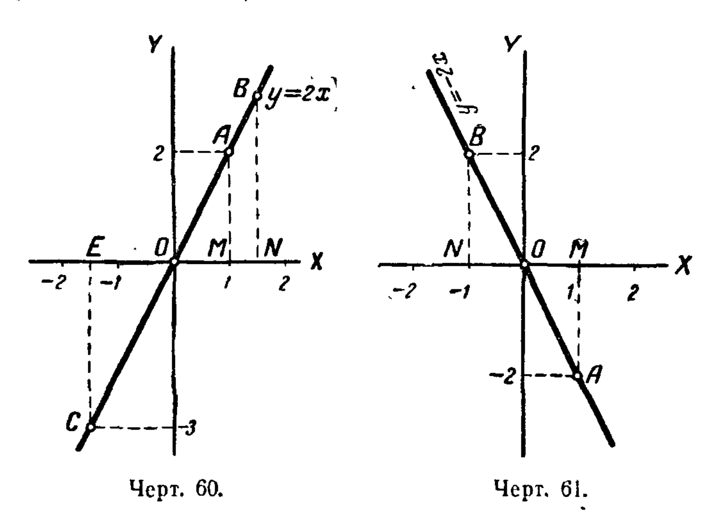
При любом данном k значение y зависит от значения x. Следовательно, мы можем считать x аргументом, а y функцией этого аргумента.

В § 74 на примерах путем построения нескольких точек было показано, что графиком функции $y=kx$ является прямая. Докажем теперь это положение.

Теорема. ***Графиком функции $y=kx$ является прямая линия, проходящая через начало координат.***

Доказательство. Построим две точки графика. Положим $x=0$. Тогда из (1) находим $y=0$. Значит, точка O (0; 0) принадлежит графику, то есть график проходит через начало координат.

Положим $x=1$. Тогда из (1) получим $y=k$. Значит, график проходит через точку A (1; k). Построим эту точку. Она будет лежать выше оси абсцисс, если $k>0$ (на чертеже 60 $k=2$), и ниже этой оси, если $k<0$ (на чертеже 61 $k=-2$).



Черт. 60. Черт. 61.

Проведём через точки O и A прямую и докажем, что эта прямая является графиком функции $y=kx$.

Доказательство разобьём на две части.

1) Докажем, что *все точки прямой OA принадлежат графику функции $y=kx$.*

2) Докажем, что *никакая другая точка плоскости не принадлежит графику функции $y=kx$.*

Для доказательства первого положения достаточно доказать, что координаты любой точки прямой OA удовлетворяют равенству $y=kx$.

Возьмём на прямой OA (черт. 60) произвольную точку B (m; n). Треугольники OMA и ONB подобны, так как имеют по прямому углу и угол AOM у них общий

Из подобия их заключаем:

$$\frac{BN}{ON}=\frac{AM}{OM}. \qquad (2)$$

Но $BN=n$, $ON=m$, $AM=k$, $OM=1$. Сделав подстановку в (2), получим:

$$\frac{n}{m}=\frac{k}{1}.$$

Отсюда

$$n=km. \qquad (3)$$

Равенство (3) показывает, что координаты точки $B(m;\ n)$ удовлетворяют равенству (1), и, следовательно, эта точка принадлежит графику функции $y=kx$.

Мы взяли на прямой OA точку B, лежащую выше оси абсцисс. Возьмём теперь на этой же прямой точку C, лежащую ниже оси абсцисс (черт. 60).

Пусть её координаты равны p и q.

Из подобия треугольников OMA и OEC находим:

$$\frac{EC}{EO}=\frac{AM}{OM}=\frac{k}{1}. \qquad (4)$$

Координаты p и q здесь отрицательные числа.

Следовательно, длина EO равна положительному числу $-p$, а длина EC — положительному числу $-q$. Сделав подстановку в (4), получим:

$$\frac{-q}{-p}=\frac{k}{1}, \text{ или } \frac{q}{p}=k, \quad q=kp. \qquad (5)$$

Равенство (5) показывает, что и точка $C(p;\ q)$ принадлежит графику.

Так как точки B и C на прямой OB мы брали произвольно, то отсюда следует, что любая точка прямой BC лежит на графике функции $y=kx$.

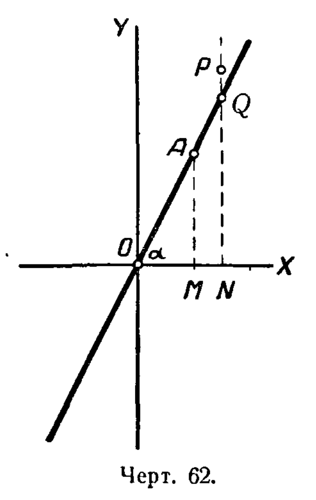
Докажем теперь второе положение: если точка не лежит на прямой OA, то она не принадлежит графику функции $y=kx$.

Для этого достаточно доказать, что координаты любой точки, не лежащей на прямой OA, не удовлетворяют уравнению (1).

Возьмём произвольную точку P, лежащую, например, выше прямой OA.

Перпендикуляр на ось абсцисс, опущенный из этой точки, пересечёт прямую OA в некоторой точке Q (черт. 62).

Точка Q, по доказанному, принадлежит графику функции $y=kx$. Значит, $QN=k\cdot ON$. Но $PN>QN$; следовательно, $PN>k\cdot ON$. Это значит, что координаты точки P не удовлетворяют уравнению (1) и, следовательно, точка P не принадлежит графику функции $y=kx$. Таким же способом докажем, что любая точка, лежащая ниже прямой OA, не принадлежит графику функции $y=kx$.



Черт. 62.

Итак, мы доказали, что все точки прямой OA, и только эти точки, принадлежат графику функции $y=kx$, то есть прямая OA является графиком функции $y=kx$.

Предлагается учащимся повторить всё доказательство этой теоремы для чертежа 61 (при доказательстве учитывать знаки координат рассматриваемых точек). Для краткости вместо фразы «прямая, являющаяся графиком функции $y=kx$» принято говорить «прямая $y=kx$».

Строя графики функции $y=kx$ при различных значениях k, легко заметить следующее:

1) Если $k>0$, то обе координаты любой точки графика имеют одинаковые знаки: они или обе положительны, или обе отрицательны, или обе равны нулю. Это значит, что прямая расположена в I и III четвертях (черт. 60). Если $k<0$, то координаты любой точки графика (кроме точки O) имеют противоположные знаки. Это значит, что прямая расположена во II и IV четвертях (черт. 61).

2) Если $k>0$, то из треугольника OAM (черт. 62) имеем:

$$\frac{y}{x}=k=\operatorname{tg}\alpha,$$

то есть *коэффициент k равен тангенсу угла, образуемого прямой OA с осью абсцисс.*

Поэтому число k называется угловым коэффициентом.

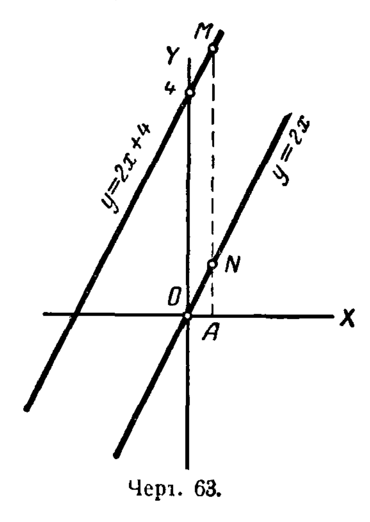
§ 119. Линейная функция.

В § 75 рассматривалась линейная зависимость между двумя величинами. Она выражалась равенством

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k и b — определённые числа ($k \neq 0$).

При заданных k и b значение y зависит от значения x. Следовательно, мы можем считать x аргументом, а y — его функцией. Функция такого вида называется линейной. Так как правая часть равенства (1) — многочлен первой степени относительно x, то линейной функции можно дать такое определение.



Черт. 63.

Определение. **Многочлен первой степени относительно аргумента называется линейной функцией этого аргумента.**

Так как при $b = 0$ функция примет вид $y = kx$, то рассмотренная в предыдущем параграфе функция является частным случаем линейной функции.

В § 75 было показано построением, что графиком линейной функции является прямая. Докажем это.

Теорема. ***Графиком линейной функции является прямая.***

Доказательство. Построим сначала прямую

$$y = kx \tag{2}$$

(черт. 63; $k = 2$). Дадим абсциссе x произвольное значение $x = a$. Тогда ордината точки прямой (2) будет равна:

$$y = ka, \tag{3}$$

а ордината точки графика функции (1) будет равна:

$$y = ka + b. \qquad (4)$$

Так как абсциссу x мы взяли произвольно, то ордината л ю б о й точки графика функции $y = kx + b$ равна значению b, сложенному с ординатой точки прямой $y = kx$, имеющей ту же абсциссу.

Установив это, легко построим график функции $y = kx + b$. Пусть $b > 0$ (на чертеже 63 $b = 4$). Дадим x произвольное значение, например $x = 0$. Тогда из (1) получим:

$$y = k \cdot 0 + b; \qquad y = b.$$

Получили одну точку графика функции $y = kx + b$. Построим её и проведём через неё вторую прямую, параллельную прямой $y = kx$. Эта вторая прямая и будет графиком функции $y = kx + b$. Действительно, ордината любой точки M этой прямой равна сумме $MN = b$ и NA *ординаты точки прямой* $y = kx$ *с той же абсциссой*. Значит, координаты любой точки второй прямой удовлетворяют уравнению (4).

С другой стороны, если координаты какой-либо точки удовлетворяют уравнению (4), то ордината $y = kx + b$ этой точки равна ординате kx соответствующей точки прямой $y = kx$ плюс b. Значит, рассматриваемая точка лежит на второй прямой. Эта прямая, параллельная прямой $y = kx$, и отсекает на оси ординат отрезок, равный по величине b.

Если $b < 0$, то графиком функции $y = kx + b$ будет прямая, лежащая ниже графика функции $y = kx$ (из ординат точек прямой $y = kx$ вычитается $|b|$).

Рассмотрим некоторые частные случаи функции

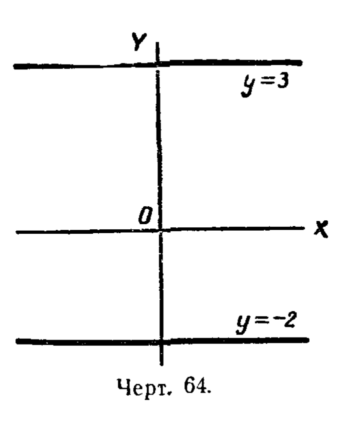
$$y = kx + b.$$

1) Пусть $b = 0$. Тогда $y = kx$. Мы знаем, что графиком этой функции является прямая, проходящая через начало координат O (0; 0).

2) Пусть $k = 0$, $b \neq 0$. Тогда $y = b$.

Из этого равенства видно, что при любом значении x ордината точки графика функции $y = b$ будет равна b.

Это значит, что все точки графика находятся на одном и том же расстоянии $|b|$ от оси абсцисс. При $b>0$ график лежит выше, а при $b<0$ ниже оси абсцисс. Другими словами, графиком функции $y=b$ является прямая, параллельная оси абсцисс. Эта прямая проходит через точку $(0; b)$. На чертеже 64 построены графики функций: $y=3$ и $y=-2$.



Черт. 64.

3) Пусть $k=0$ и $b=0$, тогда при любом значении x ордината $y=0$. Очевидно, что этому условию удовлетворяют все точки оси абсцисс, и только они. Значит графиком функции $y=0$ является ось абсцисс.

§ 120. Трехчлен второй степени.

Общий вид трёхчлена второй степени, как мы знаем,

$$ax^2+bx+c,$$

где a, b и c — любые числа $(a \neq 0)$. Давая x любые значения, будем получать соответствующие значения трёхчлена.

Значит, трёхчлен является функцией аргумента x. Обозначим эту функцию через y:

$$y=ax^2+bx+c. \qquad (1)$$

Те значения аргумента, которые обращают его в нуль, называются **корнями** трёхчлена. Чтобы найти эти корни, достаточно решить уравнение:

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (2)$$

Пример 1.

$$y=x^2-4x-5. \qquad (3)$$

Приведём таблицу значений этого трёхчлена при некоторых значениях x.

x	-4	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	27	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	27	40

Корнями трёхчлена являются числа — 1 и 5. Эти числа мы могли найти, решив уравнение:

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Рассматривая таблицу, замечаем, что при увеличении значений x значения y сначала убывают, затем возрастают. Докажем, что при $x=2$ значение трёхчлена $y=-9$ является наименьшим. Для этого представим трёхчлен в таком виде:

$$y = (x-2)^2 - 9.$$

Раскрыв скобки, убедимся, что это выражение тождественно с (3).

Отсюда видим, что при любом значении x, кроме $x=2$, значение y будет больше (—9), так как к (—9) прибавляется положительное число.

Значит, при $x=2$ трёхчлен принимает наименьшее значение, равное (—9).

Пример 2.

$$y = -x^2 + 2x + 8.$$

Составим таблицу:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-27	-16	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7	-16	-27	-40

Таблица показывает, что при увеличении значений x значения трёхчлена сначала увеличиваются, затем уменьшаются. *Докажем, что при $x=1$ трёхчлен имеет наибольшее значение.* Запишем трёхчлен в таком виде:

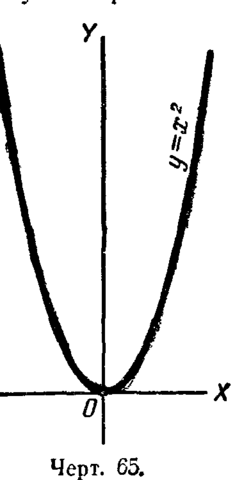
$$y = -(x-1)^2 + 9.$$

Отсюда видим, что при любом значении x, кроме $x=1$, значение y будет меньше 9, и только при $x=1$ оно будет равно 9, то есть будет наибольшим.

Построим теперь график трёхчлена (1), начав с некоторых частных случаев.

§ 121. График функции $y=x^2+n$.

С графиком функции $y=x^2$ мы уже встречались (§ 89). Он представляет собой линию, называемую п а р а б о л о й (черт. 65). В дальнейшем для краткости вместо слов «парабола, изображающая функцию $y=x^2$», будем говорить «парабола $y=x^2$».



Черт. 65.

Напомним, что для параболы $y=x^2$ ось ординат является осью симметрии; её называют о с ь ю п а р а б о л ы.

Точка O, в которой парабола пересекается с осью симметрии, называется в е р ш и н о й параболы. Значит, вершина параболы $y=x^2$ находится в точке O (0; 0), то есть в начале координат.

Построим график функции:

$$y=x^2+3. \qquad (1)$$

Сравнивая эту функцию с функцией

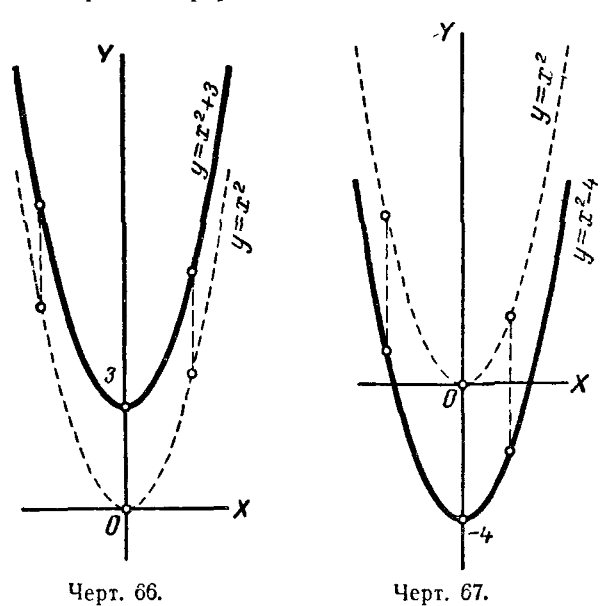
$$y=x^2, \qquad (2)$$

замечаем, что при одном и том же значении x значение y функции (1) будет на 3 больше значения y функции (2). Например:

x	—5	—2	0	1	3	7
x^2	25	4	0	1	9	49
x^2+3	28	7	3	4	12	52

Это значит, что каждая точка графика первой функции будет лежать на 3 единицы длины выше точки с той же абсциссой графика второй функции (черт. 66). Отсюда следует, что график функции (1) можно получить, перенеся на 3 единицы вверх в направлении оси ординат график функции (2).

Примечание. Практически при построении графика функции $y = x^2 + 3$ нет надобности два раза строить параболу, а именно сначала строить график $y = x^2$, а затем переносить его в новое положение. Достаточно через точку (0; 3) провести вспомогательную ось O_1X_1, параллельную оси абсцисс, и построить параболу $y_1 = x^2$ в системе координат X_1O_1Y.



Черт. 66. Черт. 67.

Рассуждая таким же образом, покажем, что график функции

$$y = x^2 - 4 \qquad (3)$$

можно получить, перенеся график функции $y = x^2$ в направлении оси ординат на 4 единицы вниз (черт. 67); говорят, что график переносится на —4 единицы в направлении оси ординат.

Отсюда можно сделать общий вывод:

График функции $y = x^2 + n$ можно получить, перенеся график функции $y = x^2$ в направлении оси ординат на n единиц.

Надо иметь в виду, что n может быть как положительным, так и отрицательным числом; в первом случае перенос производится на $|n|$ единиц вверх, а во втором на $|n|$ единиц вниз.

Таким образом, графиком функции $y = x^2 + n$ является парабола, расположенная симметрично относительно оси ординат. Её вершина находится в точке $(0; n)$.

§ 122. График функции $y = (x + m)^2$.

Построим график функции

$$y = (x + 3)^2. \quad (1)$$

Сравнивая эту функцию с функцией

$$y = x^2, \quad (2)$$

можно заметить, что при каком-либо значении $x = a$ функция (1) будет иметь то же значение, какое имеет функция (2) при $x = a + 3$.

x	-8	-6	-4	-3	-1	1	4
$(x + 3)^2$	25	9	1	0	4	16	49
x	-5	-3	-1	0	2	4	7
x^2	25	9	1	0	4	16	49

Это значит, что если некоторая точка лежит на графике (2) второй функции, то точка, у которой абсцисса на 3 единицы меньше, а ордината та же, лежит на графике (1) первой функции.

Отсюда следует, что график функции (1) можно получить, перенеся на 3 единицы влево график функции (2);

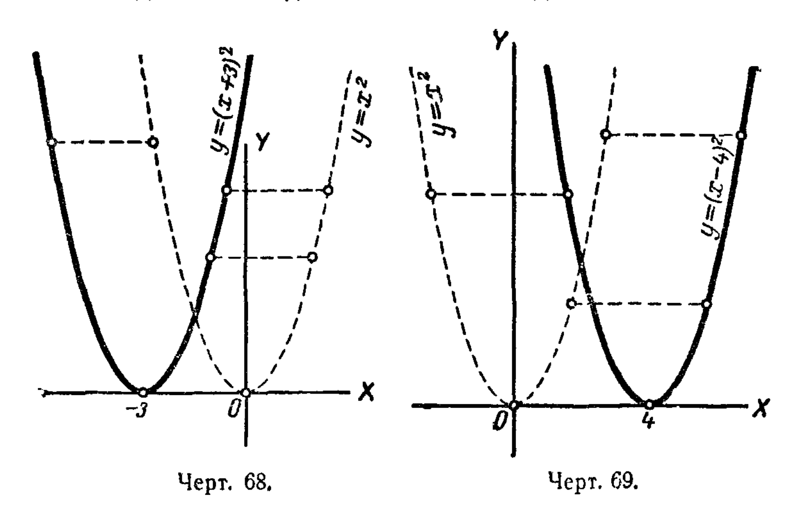
говорят, что график (2) переносится на -3 единицы в направлении оси абсцисс (черт. 68).

Рассуждая таким же образом, можно показать, что график функции

$$y=(x-4)^2$$

можно получить, перенеся график функции $y=x^2$ на 4 единицы вправо, в направлении оси абсцисс (черт. 69).

Отсюда можно сделать общий вывод:



Черт. 68. Черт. 69.

График функции $y=(x+m)^2$ можно получить, перенеся график функции $y=x^2$ в направлении оси абсцисс на $-m$ единиц. Перенос производится на $|m|$ единиц влево при $m>0$ и вправо при $m<0$. Таким образом, графиком функции $y=(x+m)^2$ является парабола, расположенная симметрично относительно прямой, параллельной оси ординат и отстоящей от неё на расстоянии, равном $|m|$. Вершина параболы находится в точке $(-m; 0)$.

Примечание. Практически для построения графика можно поступить так: через точку $(-3; 0)$ провести вспомогательную ось O_1Y_1, параллельную оси OY, и в системе координат XO_1Y_1 построить параболу $y=x_1^2$, которая и будет являться графиком функции $y=(x+3)^2$ в системе координат XOY.

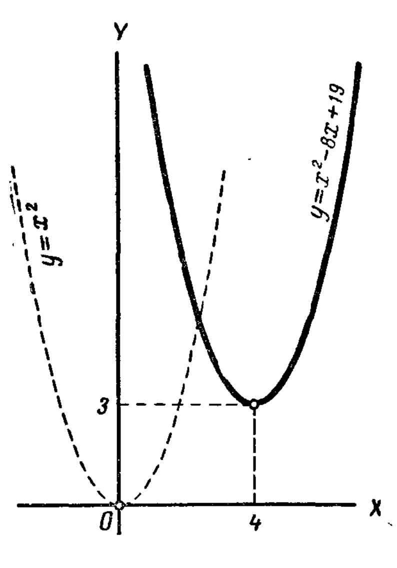
§ 123. График трёхчлена $y = x^2 + px + q$.

Построим график трёхчлена:

$$y = x^2 - 8x + 19. \qquad (1)$$

Сначала преобразуем этот трёхчлен, выделив в нём квадрат двучлена $x - 4$:

$$y = (x - 4)^2 + 3. \qquad (2)$$



Черт. 70.

Видим, что график функции (2) можно получить, перенеся в направлении оси ординат вверх на 3 единицы график функции $y = (x - 4)^2$ (§ 121).

Но график функции $y = (x - 4)^2$ является графиком функции $y = x^2$, перенесённым в направлении оси абсцисс на 4 единицы вправо (§ 122).

Отсюда следует, что график функции (2), или, что то же, функции (1), можно получить, перенеся график функции $y = x^2$ на 4 единицы вправо и на 3 единицы вверх (черт. 70).

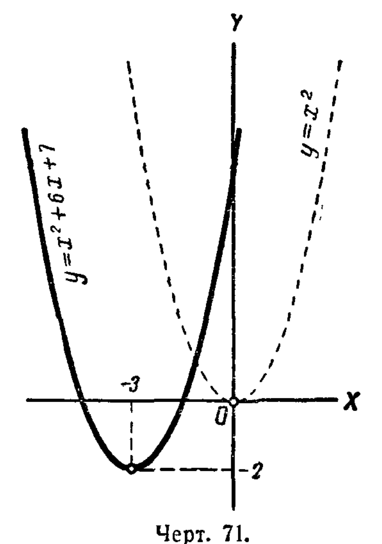
Рассуждая таким же образом, построим график трёхчлена:

$$y = x^2 + 6x + 7. \qquad (3)$$

Представим трёхчлен в таком виде:

$$y = (x + 3)^2 - 2.$$

Заключаем, что график трёхчлена (3) можно получить, перенеся график функции $y = x^2$ на 3 единицы влево и на 2 единицы вниз (черт. 71).



Черт. 71.

Точно так же графиком трёхчлена

$$y = x^2 - 5x - 1,$$

который можно представить в виде

$$y = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 1,$$

или

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4},$$

является парабола $y = x^2$, перенесённая на $\frac{5}{2}$ единицы вправо и на $\frac{29}{4}$ единицы вниз.

Возьмём теперь трёхчлен:

$$y = x^2 + px + q.$$

Его можно представить в таком виде:

$$y = x^2 + 2\frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q,$$

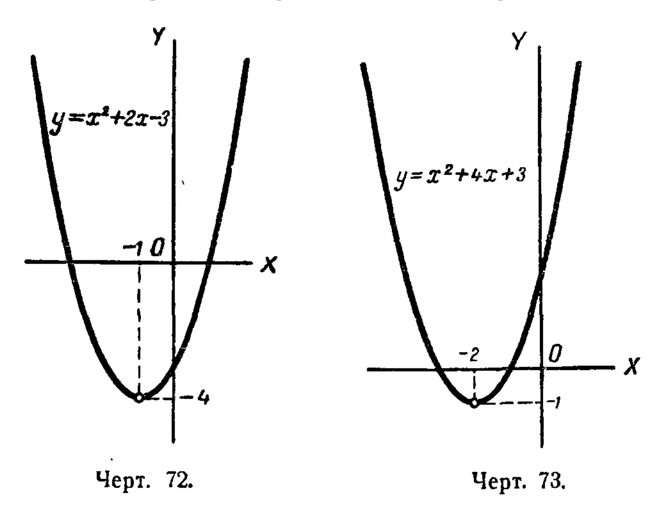
или

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Отсюда заключаем, что график трёхчлена $y = x^2 + px + q$ можно получить, перенеся график функции $y = x^2$

в направлении оси абсцисс на $-\frac{p}{2}$ единиц и в направлении оси ординат на $\frac{4q-p^2}{4}$ единиц.

Таким образом, графиком трёхчлена $y=x^2+px+q$ является парабола $y=x^2$, расположенная симметрично относительно прямой, параллельной оси ординат и отстоящей от неё на расстоянии, равном $\left|\frac{p}{2}\right|$. Вершина параболы находится в точке $\left(-\frac{p}{2};\ \frac{4q-p^2}{4}\right)$.



Черт. 72. Черт. 73.

Пример 1.

$$y=x^2+2x-3.$$

Здесь $\frac{p}{2}=1$; $\frac{4q-p^2}{4}=-4$. Значит, графиком трёхчлена является парабола $y=x^2$, перенесённая на 1 единицу влево и на 4 единицы вниз (черт. 72).

Пример 2.

$$y=x^2+4x+3.$$

Здесь $\frac{p}{2}=2$; $\frac{4q-p^2}{4}=-1$. График дан на чертеже 73.

§ 124. График трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$.

Построим график функции $y = 2x^2$ и сравним между собой функции

$$y = x^2 \qquad (1)$$

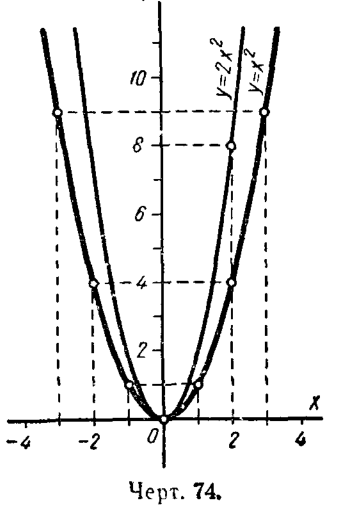
и

$$y = 2x^2. \qquad (2)$$

Мы видим, что при одном и том же значении аргумента x значения y функции (2) будут в 2 раза больше значений функции (1). Например:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32

Это значит, что ордината каждой точки графика функции (2) равна удвоенной ординате точки с той же абсциссой графика функции (1).



Черт. 74.

Отсюда следует, что график функции (2) можно получить так: построить график функции (1) (черт. 74) и удвоить ординату каждой его точки.

Наглядно это преобразование можно представить при помощи следующей модели.

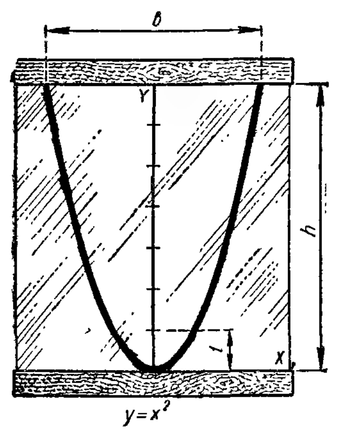
Представим себе ось OX в виде неподвижной планки, а верхнюю полуплоскость — в виде растяжимой (например, резиновой) плёнки, на которой начерчена парабола $y = x^2$. Если теперь растянуть плёнку по направлению вверх в 2 раза, то парабола $y = x^2$ перейдёт в параболу $y = 2x^2$ (черт. 75).

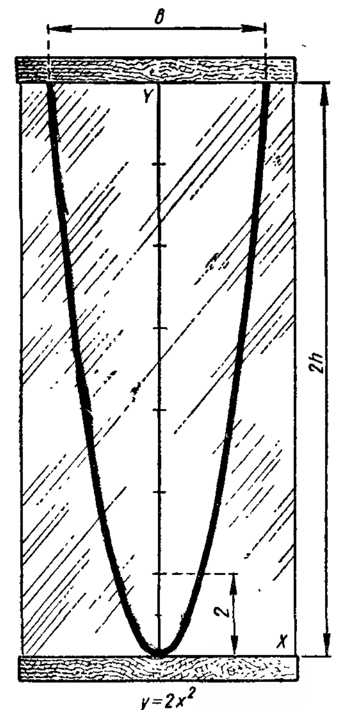
Полученная линия (черт. 75) и будет графиком функции (2). Эта линия тоже называется параболой. По сравнению с параболой $y=x^2$ она «более круто» поднимается вверх.

Рассмотрим теперь функцию

$$y=\frac{1}{2}x^2. \qquad (3)$$

Чтобы перейти от графика (1) к графику (3), достаточно все ординаты точек графика (1) уменьшить в 2 раза.





Черт. 75.

На нашей модели это будет соответствовать не растяжению, а сжатию плёнки в 2 раза. Вообще, чтобы построить график функции $y=ax^2$, где a — положительное число, достаточно все ординаты точек параболы $y=x^2$ умножить на a.

При помощи нашей модели этот переход можно пояснить как растяжение при $a>1$ (в a раз) либо сжатие при $a<1$ $\left(\text{в } \frac{1}{a} \text{ раза}\right)$ основной параболы $y=x^2$.

Рассмотрим график функции

$$y=-2x^2. \qquad (4)$$

Очевидно, при любом значении x значения y в (2) и (4) будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Это значит, что точки графиков функций (2) и (4) с одной и той же абсциссой имеют противоположные ординаты, то есть расположены симметрично относительно оси абсцисс.

Отсюда следует, что и весь *график функции* (4) *будет симметричен* с *графиком* (2) *относительно оси абсцисс.*

Таким образом, график функции $y=-2x^2$ можно получить, повернув (в пространстве) график функции $y=2x^2$ на 180° вокруг оси абсцисс.

Иначе говоря, парабола $y=-2x^2$ получается зеркальным отражением параболы $y=2x^2$ в оси абсцисс.

Вообще, при $a<0$ график функции $y=ax^2$ можно получить из основной параболы $y=x^2$ так: *умножить ординаты точек параболы* $y=x^2$ *на* $|a|$ *(растяжение либо сжатие), а затем зеркально отразить полученную параболу в оси абсцисс.*

На чертеже 76 изображён ряд парабол $y=ax^2$ при различных значениях a. Мы видим, что при $a>0$ параболы обращены вогнутостью вверх, а при $a<0$ — вниз.

Построим график полного квадратного трёхчлена, например:

$$y=2x^2+4x+6.$$

Проделаем такие преобразования. Вынесем за скобку коэффициент при x^2, а затем выделим полный квадрат:

$$x=2(x^2+2x+3)=2(x^2+2x+1+2)$$

и, наконец,

$$y=2(x+1)^2+4.$$

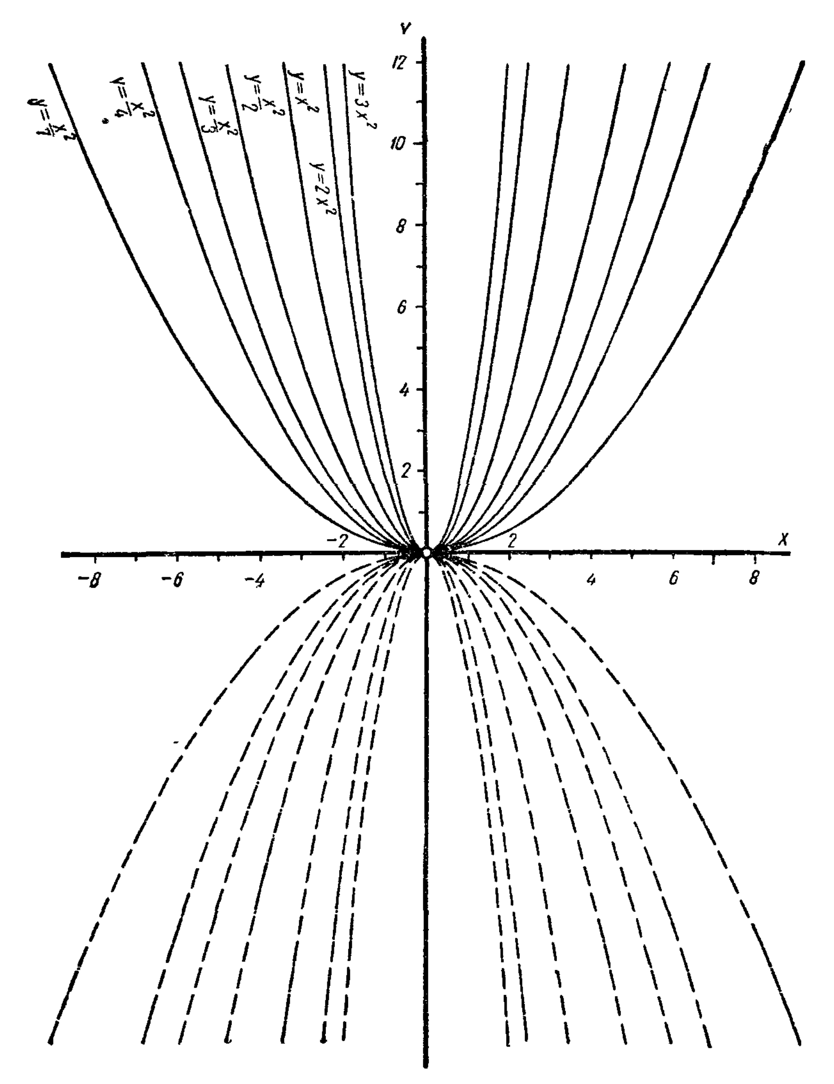
Этот график можно получить из параболы $y=x^2$ постепенными преобразованиями так:

1) перенесём параболу $y=x^2$ на 1 единицу влево (черт. 77а), получим:

$$y=(x+1)^2;$$

2) умножим все ординаты на 2 (растяжение в 2 раза), получим:

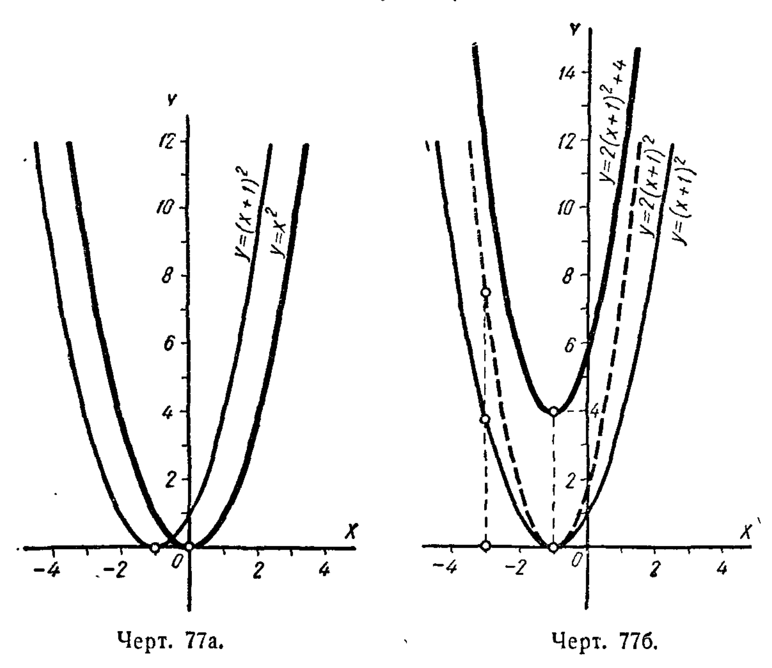
$$y=2(x+1)^2;$$



Черт. 76.

3) перенесём последний график вверх на 4 единицы, получим искомый график (черт. 77б):

$$y = 2(x+1)^2 + 4.$$



Черт. 77а.

Черт. 77б.

Примечание. Практически можно ограничиться построением лишь одной параболы. Для этого достаточно через точку O_1 $(-1; 4)$ провести оси O_1X_1 и O_1Y_1, параллельные осям XOY, и во вспомогательной системе координат $X_1O_1Y_1$ построить (например, по точкам) параболу $y_1 = 2x_1^2$.

Рассмотрим еще пример: построим график

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1.$$

Представим данную функцию в следующем виде:

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 3) = -\frac{1}{3}[(x-3)^2 - 6] =$$
$$= -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 2.$$

Строим график постепенно так:

1) переносим параболу $y=x^2$ на 3 единицы вправо:

$$y=(x-3)^2;$$

2) умножаем ординаты на $\frac{1}{3}$ (сжатие): $\frac{1}{3}(x-3)^2$;

3) отражаем зеркально в оси абсцисс:

$$y=-\frac{1}{3}(x-3)^2;$$

4) переносим вверх на 2 единицы:

$$y=-\frac{1}{3}(x-3)^2+2.$$

Всё сказанное применимо к квадратному трёхчлену с любыми коэффициентами.

Рассмотрим квадратный трёхчлен в общем виде:

$$y=ax^2+bx+c.$$

Выполним такие преобразования:

$$y=a\left(x^2+\frac{2b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

и, наконец,

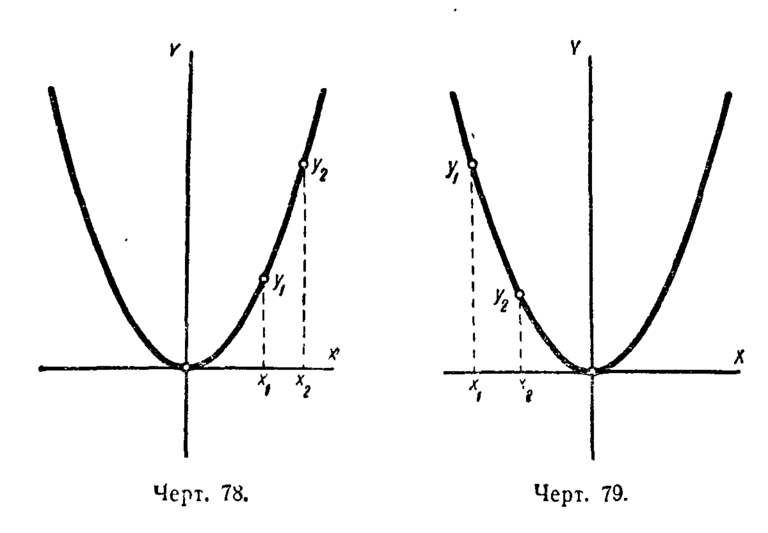
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Мы видим, что искомый график можно получить, перенеся параболу $y=x^2$ на $-\frac{b}{2a}$ в направлении оси абсцисс, умножив ординаты точек полученной параболы на a и перенеся последний график на $\frac{4ac-b^2}{4a}$ в направлении оси ординат.

В результате этих преобразований вершина параболы окажется в точке $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$; при этом парабола обращена вогнутостью вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$.

§ 125. Возрастание и убывание квадратного трёхчлена.

Рассматривая параболу $y=x^2$, мы видим, что при положительных значениях аргумента x линия «поднимается вверх», а при отрицательных «опускается вниз». Из чертежа 78 видно, что если взять два положительных значения аргумента x_1 и x_2, то б о л ь ш е м у значению аргумента x соответствует б о л ь ш е е значение функции y: если $x_1<x_2$, то и $y_1<y_2$.



Черт. 78. Черт. 79.

Возьмём теперь значения x_1 и x_2 отрицательными. Тогда, как показывает чертёж 79, если $x_1<x_2$, то $y_1>y_2$.

Значит, б о л ь ш е м у значению аргумента x соответствует м е н ь ш е е значение функции y.

В общем случае можно рассуждать так: пусть x_1 и x_2 — два положительных числа, причём $x_1<x_2$.

Вычислим соответствующие значения функции:

$$y_1=x_1^2 \text{ и } y_2=x_2^2.$$

Чтобы узнать, какое из чисел, y_1 или y_2, больше, составим их разность:

$$y_2-y_1=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1). \qquad (1)$$

Сумма x_2+x_1 положительных чисел положительна и разность x_2-x_1 положительна, так как мы взяли $x_2>x_1$. Правая часть равенства (1) есть произведение положительных чисел, а потому положительна. Это значит, что разность y_2-y_1 положительна, но тогда $y_1<y_2$. Значит, при $x_1<x_2$ действительно $y_1<y_2$.

Определение. **Если из двух различных значений аргумента большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то данная функция называется возрастающей.**

Следовательно, при положительных значениях аргумента x функция $y=x^2$ возрастает.

Возьмём теперь два отрицательных значения x_1 и x_2 так, что $x_1<x_2$. Мы уже составили разность y_2-y_1 и представили её в виде произведения:

$$y_2-y_1=(x_2+x_1)(x_2-x_1).$$

Теперь (в отличие от предыдущего случая) сумма x_2+x_1 отрицательных чисел будет отрицательна, а потому разность y_2-y_1 окажется отрицательной, то есть при $x_1<x_2$ имеем $y_1>y_2$.

Определение. **Если из двух различных значений аргумента большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то данная функция называется убывающей.**

Следовательно, при отрицательных значениях аргумента функция $y=x^2$ убывает.

То же самое можно сказать про возрастание и убывание функции $y=ax^2$, где a — положительное число.

При $x<0$ функция $y=ax^2$ убывает, при $x>0$ возрастает, при $x=0$ имеет наименьшее значение $y=0$.

Очевидно, что при отрицательном коэффициенте a имеет место противоположное заключение, а именно:

при $x<0$ функция $y=ax^2$ возрастает, при $x>0$ убывает, при $x=0$ имеет наибольшее значение $y=0$.

Формула преобразования квадратного трёхчлена

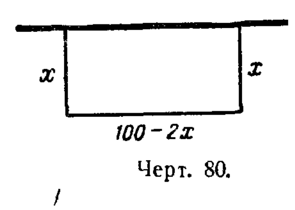
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

позволяет ответить на вопрос о возрастании и убывании квадратного трёхчлена общего вида $y = ax^2 + bx + c$.

Вершина параболы $y = ax^2$ оказалась перенесённой в точку $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$; но при переносе параболы направление её вогнутости (вверх или вниз) не изменяется. Значит, если $a > 0$, то при $x < -\frac{b}{2a}$ трёхчлен убывает, при $x > -\frac{b}{2a}$ возрастает, при $x = -\frac{b}{2a}$ имеет наименьшее значение, равное $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Если $a < 0$, то при $x < -\frac{b}{2a}$ трёхчлен возрастает, при $x > -\frac{b}{2a}$ убывает, при $x = -\frac{b}{2a}$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Задача. *Забором данной длины $l = 100$ м требуется огородить прямоугольный участок, прилегающий к стене. Каковы должны быть длина и ширина участка, чтобы он имел наибольшую площадь?*



Черт. 80.

Решение. Пусть x и y — длина и ширина участка (черт. 80); тогда $S = xy$, где S — площадь участка. Но по условию длина забора равна $2x + y = 100$, откуда $y = 100 - 2x$ и, значит,

$$S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Мы видим, что площадь S выражается квадратным трёхчленом, в котором $a = -2$, $b = 100$, $c = 0$. Этот трёхчлен имеет наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a} = 25$, тогда $y = 100 - 2x = 50$.

Итак, мы нашли стороны участка, имеющего наибольшую площадь: $x = 25$, $y = 50$.

Заметим, что можно было бы и не пользоваться готовой формулой, а применить к трёхчлену преобразование выделения полного квадрата:

$$S = -2(x^2 - 50x) = -2[(x^2 - 50x + 625) - 625] =$$
$$= -2(x - 25)^2 + 1250.$$

Отсюда ясно, что наибольшее значение S есть 1250 при $x = 25$.

§ 126. Функция $y = x^3$ и её график.

Составим таблицу значений функции $y = x^3$:

x	—3	—2	—1	—0,5	—0,25	0	0,25	0,5	1	2	3
y	—27	—8	—1	—0,125	$\approx$ 0,02	0	$\approx$ 0,02	0,125	1	8	27

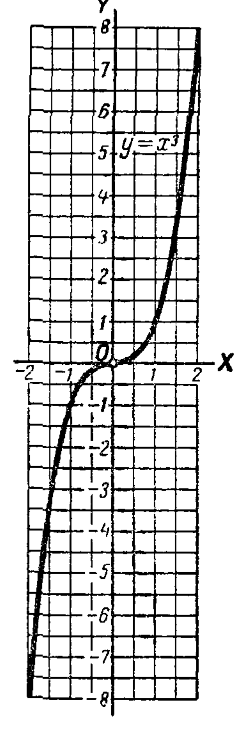
Мы видим, что при $x > 0$ и $y > 0$ (куб положительного числа положителен), а при $x < 0$ и $y < 0$ (куб отрицательного числа отрицателен). Следовательно, график расположится на координатной плоскости в I и III четвертях. Заменим значение аргумента x противоположным значением $-x$, тогда и функция примет противоположное значение; так как если $y = x^3$, то

$$(-x)^3 = -x^3 = -y.$$

Значит, каждой точке (x; y) графика соответствует точка ($-x$; $-y$) того же графика, расположенная симметрично относительно начала координат.

Таким образом, *начало координат является центром симметрии графика.*

График функции $y = x^3$ изображён на чертеже 81. Эта линия называется **кубической параболой**.



Черт. 81.

В I четверти кубическая парабола (при $x > 0$) «круто» поднимается

вверх (значения y «быстро» возрастают при возрастании x, см. таблицу), при малых значениях x линия «тесно» подходит к оси абсцисс (при «малых» x значение y «весьма мало», см. таблицу). Левая часть кубической параболы (в III четверти) симметрична правой относительно начала координат.

Аккуратно вычерченный график может служить средством приближённого возведения чисел в куб. Так, например, положив $x = 1{,}6$, найдём по графику $y \approx 4{,}1$.

Для приближённого вычисления кубов составлены специальные таблицы.

Такая таблица имеется и в пособии В. М. Брадиса «Четырёхзначные математические таблицы».

Эта таблица содержит приближённые значения кубов чисел от 1 до 10, округлённые до 4-х значащих цифр.

Устройство таблицы кубов и правила пользования ею такие же, как и таблицы квадратов. Однако при увеличении (или уменьшении) числа в 10, 100 и т. д. раз его куб увеличивается (или уменьшается) в 1000, 1 000 000 и т. д. раз. Значит, при пользовании таблицей кубов надо иметь в виду следующее правило переноса запятой:

Если в числе перенести запятую на несколько цифр, то в кубе этого числа надо перенести запятую в ту же сторону на утроенное количество цифр.

Поясним сказанное примерами:

1) Вычислить $2{,}235^3$. По таблице находим: $2{,}23^3 \approx 11{,}09$; прибавляем к последней цифре поправку 8 на последний знак: $2{,}235^3 \approx 11{,}17$.

2) Вычислить $(-179{,}8)^3$. Так как $(-a)^3 = -a^3$, то находим $(179{,}8)^3$.

По таблице найдем $1{,}798^3 \approx 5{,}813$, перенеся запятую, получим $(179{,}8)^3 \approx 5813000$.

Значит, $(-179{,}8)^3 \approx -5813000$.

Приближённые формулы. Если в тождестве

$$(1 \pm \alpha)^3 = 1 \pm 3\alpha + 3\alpha^2 \pm \alpha^3$$

число α мало по сравнению с единицей, то, отбросив члены с α^2 и α^3, получим приближённые формулы:

$$(1 \pm \alpha)^3 \approx 1 \pm 3\alpha.$$

По этим формулам легко найти приближённые кубы чисел, близких к единице, например:

$1,02^3 \approx 1 + 3 \cdot 0,02 = 1,06$; точный куб: $1,061208$;
$1,03^3 \approx 1 + 3 \cdot 0,03 = 1,09$; » » $1,092727$;
$0,98^3 \approx 1 - 3 \cdot 0,02 = 0,94$; » » $0,941192$;
$0,97^3 \approx 1 - 3 \cdot 0,03 = 0,91$; » » $0,912673$.

Возведение чисел в куб на счётной линейке. Для возведения чисел в куб на корпусе линейки имеется шкала кубов K. Шкала кубов состоит из трёх частей: левой, средней и правой (см. черт. 82); каждая из этих частей представляет собой основную шкалу D, но уменьшенную в три раза.

Значение возводимого в куб числа отмечаем визиром на основной шкале D, а результат читаем на шкале кубов K.

Например, $2^3 = 8$ (см. черт. 39).

Несколько примеров возведения чисел в куб приведено в следующей таблице. Для сравнения даны значения кубов тех же чисел, вычисленные по четырёхзначным таблицам.

x	1,3	4,3	6,8	18,4	0,27
x^3 на линейке	2,2	79,5	315	6200	0,0196
x^3 в таблице	2,197	79,51	314,4	6230	0,01968

§ 127. Понятие о кубическом корне.

З а д а ч а. *Бак имеет форму куба, объём бака равен 8 $м^3$. Найти длину, ширину и высоту бака.*

Так как бак представляет собой куб, то его длина, ширина и высота равны между собой и равны ребру x куба.

По условию задачи объём куба x^3 равен 8 $м^3$. Значит, мы получаем уравнение: $x^3 = 8$.

Требуется найти число x, куб которого равен числу 8. Искомое число равно 2, так как $2^3 = 8$.

Итак, бак имеет размеры $2м \times 2м \times 2м$.

Правая часть
Средняя часть
Левая часть
K

Черт. 82.

Определение. **Кубическим корнем из числа a называется число, куб которого равен a.**

Действие, посредством которого отыскивается кубический корень, называется извлечением кубического корня.

Кубический корень из числа a обозначается так: $\sqrt[3]{a}$. Из определения следует, что $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Примеры.

$$\sqrt[3]{1} = 1; \quad \sqrt[3]{8} = 2; \quad \sqrt[3]{-27} = -3;$$
$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}; \quad \sqrt[3]{-0{,}001} = -0{,}1.$$

§ 128. Приближённое извлечение кубического корня.

Мы знаем, что для приближённого извлечения квадратных корней можно пользоваться специальными таблицами. Точно так же таблицами можно пользоваться и для приближённого извлечения кубического корня. Кубические корни встречаются значительно реже, чем квадратные, поэтому в пособии В. М. Брадиса нет специальной таблицы кубических корней. Для извлечения кубических корней пользуются таблицей кубов.

Поясним на примерах, как это делается. Для извлечения кубического корня надо проделать те же операции, что и при возведении в куб, но в обратном порядке. Таблица кубов содержит кубы чисел с некоторыми промежутками от 1 до 10. Так как при возрастании числа от 1 до 10 его куб возрастает от 1 до 1000 (проследите это по таблице), то по таблице можно извлекать кубические корни из чисел от 1 до 1000.

Пусть, например, требуется найти $\sqrt[3]{712{,}1}$. В таблице среди значений кубов находим число 712,1. Оно стоит в строке с пометкой 8,9 и в столбце с пометкой 3. Значит, $\sqrt[3]{712{,}1} \approx 8{,}93$, так как $(8{,}93)^3 \approx 712{,}1$. Проверим это вычислением:

$$8{,}93^3 = (8{,}93)^2 \cdot 8{,}93 = 79{,}7449 \cdot 8{,}93 = 712{,}121957 \approx 712{,}1.$$

Теперь вычислим $\sqrt[3]{56,23}$. В таблице среди значений кубов нет числа 56,23, но ближайшим к нему числом является 56,18, которое стоит в строке с пометкой 3,8 и в столбце с пометкой 3. Поэтому можно считать $\sqrt[3]{56,23} \approx 3,83$.

Проверим это вычислением:

$$(3,83)^3 = (3,83)^2 \cdot 3,83 = 14,6689 \cdot 3,83 = 56,181887 \approx 56,2.$$

Если желательно определить четвёртую значащую цифру корня, то составим разность $56,23 - 56,18 = 0,05$.

В табличке поправок в соответствующей строке нет поправки 5, а есть ближайшая к ней поправка 4, которая стоит в столбце с пометкой 1; значит, $\sqrt[3]{56,23} \approx 3,831$.

Вычислить $\sqrt[3]{0,2838}$. Увеличим подкоренное число в 1000 раз, тогда получим 283,8. Число $\sqrt[3]{283,8}$ мы можем найти по таблице $\sqrt[3]{283,8} \approx 6,57$. Но если подкоренное число увеличить в 1000 раз, то корень увеличится в 10 раз (например, $\sqrt[3]{27} = 3$, но $\sqrt[3]{27\,000} = 3 \cdot 10 = 30$). Значит, чтобы получить первый результат, надо полученное число уменьшить в 10 раз.

Итак, $\sqrt[3]{0,2838} \approx 0,6571$.

Извлечение кубического корня на счётной линейке. Извлечение кубического корня производится на тех же шкалах, что и возведение в куб. Но действие извлечения кубического корня производится в порядке, обратном действию возведения в куб. При возведении в куб мы основание отмечали визиром на шкале D, а результат читали на шкале K. Здесь же наоборот, *на шкале кубов K визиром отмечаем подкоренное число, а под ним на основной шкале D читаем значение корня.*

Так, например: 1) $\sqrt[3]{8} = 2$ (черт. 39); 2) $\sqrt[3]{80} \approx 4,31$; 3) $\sqrt[3]{800} \approx 9,28$.

В первом примере подкоренное число однозначное (8), и оно ставится в левой трети шкалы, во втором примере подкоренное число двузначное (80), оно ставится

в средней трети, в третьем примере подкоренное число трёхзначное (800), оно ставится в правой трети шкалы. Чтобы знать, в какой трети ставить произвольное подкоренное число, нужно привести его к одному из разобранных случаев.

Поясним это на примерах:

1) $\sqrt[3]{6750}=\sqrt[3]{6{,}75\cdot 10^3}\approx 1{,}89\cdot 10=18{,}9;$

2) $\sqrt[3]{67\,500}=\sqrt[3]{67{,}5\cdot 10^3}\approx 4{,}07\cdot 10=40{,}7;$

3) $\sqrt[3]{0{,}675}=\sqrt[3]{\frac{675}{10^3}}\approx\frac{8{,}77}{10}=0{,}877;$

4) $\sqrt[3]{0{,}0675}=\sqrt[3]{\frac{67{,}5}{10^3}}\approx\frac{4{,}07}{10}=0{,}407.$

В итоге получаем правило, аналогичное извлечению квадратного корня:

1) *Подкоренное число представляем в виде однозначного, двузначного или трёхзначного числа, умножив его (или разделив) на степень числа 10 с показателем степени, кратным трём.*

2) *Если подкоренное число представлено в виде однозначного числа, оно устанавливается визиром на левой части шкалы кубов; если оно представлено двузначным числом, — на средней части шкалы кубов; если же оно представлено трёхзначным числом, — то на правой части шкалы кубов.*

3) *Результат отсчитывается по визиру на основной шкале линейки.*

Для того чтобы выяснить, в какой трети шкалы следует установить подкоренное число при извлечении кубического корня, можно рекомендовать такое правило.

Подкоренное число разбивают на грани, по три цифры в каждой грани, влево от запятой, если число больше 1, и вправо от запятой, если оно меньше 1. Если первая слева грань (не считая граней, состоящих из одних нулей) содержит одну значащую цифру, то число устанавливается на левой части шкалы кубов, если в этой грани две цифры, — то на средней части, и если в этой грани три цифры, — то на правой части шкалы.

Пользуясь этим способом, легко найти значность числа и положение запятой, так как каждая грань подкоренного числа,

стоящая слева от запятой, даёт у корня один знак до запятой, а каждая чисто нулевая грань справа от запятой (если подкоренное число меньше единицы) даёт у корня один нуль после запятой.

Рассмотрим применение этого правила на тех же примерах:

$$\sqrt[3]{6'750}=18,9;\quad \sqrt[3]{67'500}=40,7;\quad \sqrt[3]{0,675'}=0,877;$$

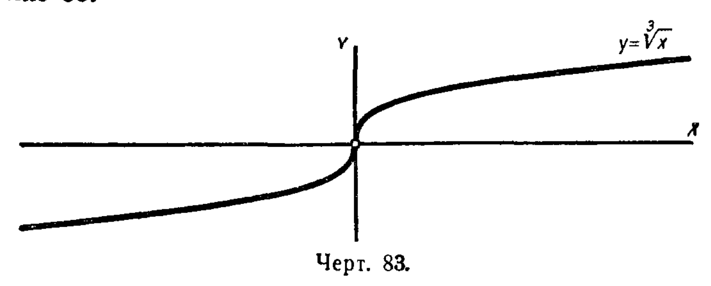
$$\sqrt[3]{0,067'5}=0,407;\quad \sqrt[3]{0,000'675}=0,0877.$$

§ 129. График функции $y=\sqrt[3]{x}$.

Для построения графика функции $y=\sqrt[3]{x}$ составим таблицу кубических корней (приближённые значения):

x	-2	-1	$-0,5$	$-0,1$	0	0,1	0,5	1	2	8	27
$\sqrt[3]{x}$	$-1,26$	-1	$\approx -0,79$	$\approx -0,46$	0	$\approx 0,46$	$\approx 0,79$	1	1,26	2	3

Эти значения можно взять, например, из таблицы В. М. Брадиса и построить на плоскости соответствующие точки. График функции $y=\sqrt[3]{x}$ изображён на чертеже 83.



Черт. 83.

§ 130. Примеры графического решения уравнений и систем уравнений.

Пример 1. Решить уравнение:

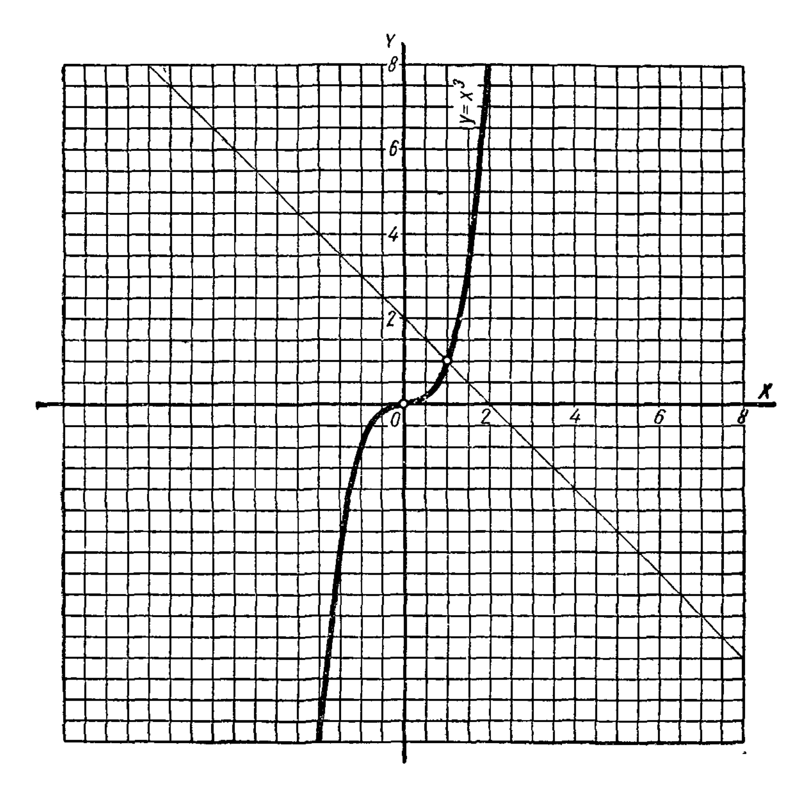
$$x^3+x-2=0.$$

Это уравнение кубическое, так как содержит неизвестное x в кубе. Такие уравнения в школьном курсе

алгебры по формулам не решаются. Решим данное уравнение графически. Запишем уравнение так:

$$x^3 = -x + 2.$$

Теперь построим графики функций $y = x^3$ и $y = -x + 2$. Это будут кубическая парабола и прямая. Из



Черт. 84.

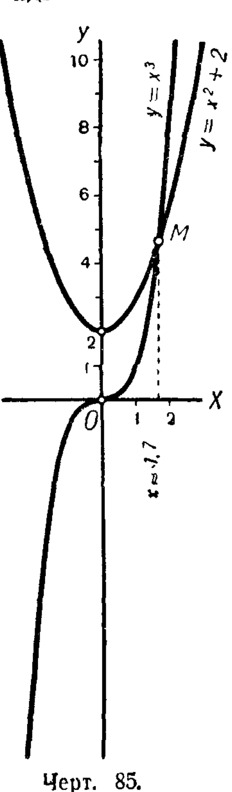
чертежа видно, что обе линии пересекаются в одной точке, абсцисса которой равна 1. Итак, уравнение имеет один корень $x = 1$ (черт. 84).

Пример 2. Решить уравнение:

$$x^3 - x^2 - 2 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$x^3 = x^2 + 2.$$



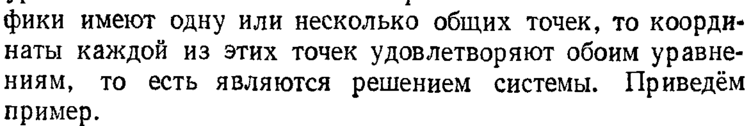
Черт. 85.

Построим (на миллиметровой бумаге) параболы: кубическую $y = x^3$ и квадратную $y = x^2 + 2$. Из чертежа 85 видим, что эти линии пересекаются в одной точке M. Опустив перпендикуляр из точки M на ось абсцисс, найдём приближённо корень данного уравнения: $x \approx 1,7$.

В § 81 был показан графический способ решения системы уравнений первой степени с двумя неизвестными. Строились прямые — графики данных уравнений. Если эти прямые пересекались, то координаты точки пересечения и являлись решением системы.

Совершенно так же решаются графически и системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

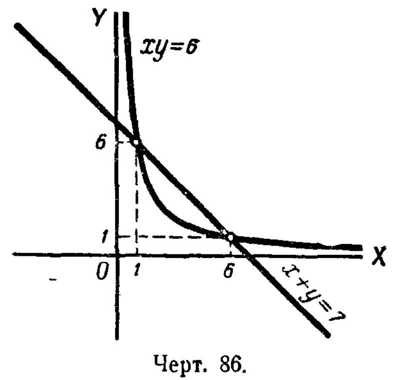
Строится график каждого из уравнений системы. Если эти графики имеют одну или несколько общих точек, то координаты каждой из этих точек удовлетворяют обоим уравнениям, то есть являются решением системы. Приведём пример.



Пример 3.

$$\begin{cases} x + y = 7; \\ xy = 6. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является прямая, проходящая через точки (7; 0) и (0; 7). Графиком второго уравнения является гипербола (см. § 76).



Черт. 86.

На чертеже 86 видно, что прямая пересекает гиперболу в двух точках. Измерив их расстояния от осей, найдём решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 6; \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить подстановкой, что мы получили два решения данной системы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава четвёртая. **Уравнение первой степени с одним неизвестным.**

Глава пятая. **Разложение многочленов на множители.**

Глава шестая. **Алгебраические дроби.**

Глава седьмая. Координаты и простейшие графики.

Глава восьмая. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Глава девятая. Счётная (логарифмическая) линейка.

Глава десятая. Квадратный корень.

Глава одиннадцатая. Квадратные уравнения.

Александр Николаевич Барсуков

АЛГЕБРА

учебник для VI—VIII классов

Редактор *Г. С. Уманский.* Художественный редактор *Б. М. Кисин.* Технический редактор *М. Д. Козловская.* Корректор *Р. Б. Берман.*

Подписано к печати с матриц 12/IV-1966 г. 84×108 1/32. Печ. л. 9,25 (15,54). Уч.-изд. л. 12,39. Тираж 900 тыс. (2100001—3000000) экз.
Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц ленинградской типографии № 1 «Печатный двор» на Книжной фабрике № 1. Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР, г. Электросталь Московской области, Школьная, 25. Зак. 251.

Цена без переплёта 16 коп., переплёт бумажный 8 коп., коленкоровый 15 коп.

24коп.